Polyederspiele
&
Auflösen von Singularitäten

Dissertation aus dem Fach Mathematik
zur Erlangung des Doktorgrades
an der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

Eingereicht bei
Ao. Univ.-Prof. Dr. Herwig Hauser im November 2005
von

Mag. Dominik Zeillinger

Inhaltsverzeichnis

Überblick **4**

1 Auflösung von Singularitäten und Polyederspiele **5**
1.1 Auflösen durch Aufblasen . . . 5
1.2 Das leichte Polyederspiel . . . 10
1.3 Das schwere Polyederspiel . . . 13

2 Das leichte Polyederspiel **16**
2.1 Das Vektorspiel . . . 18
2.1.1 Spieldefinition . . . 18
2.1.2 Beispiel für das Vektorspiel . . . 19
2.1.3 Lösung des Vektorspiels . . . 21
2.2 Lösung des leichten Polyederspiels . . . 24

3 Das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ **29**
3.1 Spieldefinition . . . 29
3.2 Mögliche Probleme . . . 29
3.2.1 Verhalten monomialer Polyeder . . . 30
3.2.2 Unendliche Spiele . . . 30
3.2.3 Anzahl der Ecken . . . 31
3.2.4 Schweres Polyederspiel und Vektorspiel . . . 31
3.3 Monomiale Polyeder . . . 32
3.4 Anzahl der Ecken . . . 34
3.4.1 Homogene Polynome . . . 35
3.4.2 Höhe, Länge und Steigung . . . 40
3.5 Das leichte Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ . . . 42
3.6 Lösung . . . 45

4 Schweres Polyederspiel, $\mathbb{N}^n, \mathrm{char} = 0$ **53**
4.1 Induktionsannahme . . . 53
4.2 Rümpfe . . . 54
4.2.1 Motivation und mögliche Probleme . . . 54
4.2.2 Prä-Rümpfe . . . 57
4.2.3 Höhe und Prä-Rumpf . . . 60
4.2.4 Projektionspolyeder . . . 63

4.3 Lösung/Induktionsschritt . . . 69
4.3.1 Länge und Steigung . . . 69
4.3.2 Nicht anliegende Schiefrümpfe . . . 71
4.3.3 Tschirnhaus Transformation . . . 81
4.3.4 Anliegende Schiefrümpfe . . . 82
4.3.5 Lösung / Induktionsschritt . . . 85

5 Schweres Polyederspiel, $\mathbb{N}^3, \mathrm{char} = p$ 87
5.1 Probleme mit Charakteristik $p > 0$ . . . 87
5.2 Das Golfspiel . . . 88
5.2.1 Spieldefinition . . . 89
5.2.2 Mögliches Problem beim Golfspiel . . . 90
5.2.3 Monomiale Polyeder im Golfspiel . . . 91
5.2.4 Verhalten der Höhe im Golfspiel . . . 92
5.2.5 Lösung des Golfspiels . . . 93
5.3 Hydra Polynome . . . 98
5.3.1 Beispiele . . . 105

A Potenzreihenring und Koordinatenwechsel 107
A.1 Definition des Potenzreihenringes . . . 107
A.2 Die $\mathfrak{q}$-adische Topologie . . . 108
A.3 Substitutionshomomorphismen . . . 110
A.4 Koordinaten und Koordinatenwechsel . . . 112

B Eigenschaften von Polyedern 113
B.1 Das Lemma von Dickson . . . 113
B.2 Eigenschaften von Polyedern . . . 115

C Mehr zum Vektorspiel 118
C.1 Formalisierung des Vektorspiels . . . 118
C.2 Das Vektorspiel im $\mathbb{R}^n$ . . . 119
C.3 Komplexität des Vektorspiels . . . 120
C.3.1 Komplexität des Vektorspiels in $\mathbb{N}^2$ . . . 120
C.3.2 Komplexität des Vektorspiels in $\mathbb{Z}^n$ . . . 123

Danksagung 126

Literaturverzeichnis 127

Überblick

Kapitel 1 *Auflösen von Singularitäten* ist ein Teilgebiet der Algebraischen Geometrie. Um eine Auflösung einer Singularität zu erreichen hat sich die *Technik des Aufblasens* als sehr nützlich erwiesen. In diesem Kapitel wird diese Technik kurz beschrieben und dann erklärt, wie sie das leichte und das schwere Polyederspiel motiviert. Diese Spiele wurden erdacht, um noch ungelöste Probleme auf dem Gebiet der Auflösung von Singularitäten zu untersuchen.

Kapitel 2 Das *leichte Polyederspiel* modelliert den kombinatorischen Teil der Technik des Aufblasens von Singularitäten. Es kann leicht durch das einfachere *Vektorspiel* gelöst werden.

Kapitel 3 In $\mathbb{N}^2$ kann das schwere Polyederspiel über einem beliebigen Körper gelöst werden. Dies ist schon lange bekannt und es gibt auch mehrere Arbeiten darüber. In diesem Kapitel wird eine Methode entwickelt, die die Konzepte *Höhe* und *Steigung* eines Polyeders verwenden.

Kapitel 4 Die in zwei Dimensionen eingeführten Begriffe Höhe und Steigung eines Polyeders können für Polyeder in beliebiger Dimension verallgemeinert werden. Mit ihrer Hilfe ist es möglich das schwere Polyederspiel in beliebiger Dimension zu lösen, falls der zugrunde liegende Körper Charakteristik 0 besitzt. Dabei spielt auch die *Tschirnhaus Transformation* eine wichtige Rolle.

Kapitel 5 Die Tschirnhaus Transformation verliert über Körpern mit positiver Charakteristik ihre Bedeutung. Daher kann die Lösung des schweren Polyederspiels von Kapitel 4 nicht für das Spiel über einem Körper mit beliebiger Charakteristik verwendet werden. In diesem Kapitel wird der kritische Fall des schweren Polyederspiels in Dimension 3 über einem Körper mit positiver Charakteristik gelöst. Dazu wird er in der Form des *Golfspiels* untersucht. Ebenso werden *Hydra Potenzreihen* untersucht, die beim Golfspiel die größten Schwierigkeiten bereiten.

Anhang A Hier wird Grundlegendes zu formalen Potenzreihen und Koordinatenwechseln erklärt.

Anhang B Begriffe wie Ecken und Kanten von Polyedern sind intuitiv klar. Dieser Abschnitt zeigt, dass die Intuition auch wirklich stimmt.

Anhang C Weiterführende Überlegungen zum Vektorspiel, etwa über die Komplexität der Gewinnstrategie aus Kapitel 2.

Kapitel 1

Auflösung von Singularitäten und Polyederspiele

Die nicht glatten Punkte einer algebraischen Menge heißen Singularitäten. Unter einer Auflösung einer algebraischen Menge X mit Singularitäten verstehen wir eine Abbildung $\pi : X' \to X$, die X als Bild einer Mannigfaltigkeit X' repräsentiert. Da X' eine Mannigfaltigkeit ist, besitzt sie keine Singularitäten mehr. Eine Auflösungsabbildung zu finden ist im Allgemeinen sehr schwierig. Die Technik des Aufblasens hat sich, zumindest in Charakteristik 0, als sehr effizient herausgestellt.

In diesem Kapitel wird zuerst anhand eines Beispiels die Technik des Aufblasens erläutert (siehe 1.1). Dann wird der kombinatorische Teil dieser Technik als leichtes Polyederspiel formuliert (siehe 1.2), dessen Studium als Vorstufe zum Untersuchen einer schwierigeren Variante des Spiels dient. Das schwere Polyederspiel (siehe 1.3) entspricht dem Auflösen von Singularitäten in lokalen Koordinaten. Ziel ist es, durch Finden einer Lösung für das schwere Polyederspiel (das heißt, eine Gewinnstrategie für den ersten Spieler), Singularitäten in *beliebiger* Charakteristik aufzulösen. Dieses Problem ist für Dimension 3 und höher nach wie vor ungelöst.

1.1 Auflösen durch Aufblasen

In diesem Abschnitt wird anhand eines Beispiels zuerst das Aufblasen einer Singularität beschrieben. Anschließend folgt noch eine genauere Definition.

Gegeben sei ein Polynom $P(x_1, \ldots, x_n)$ in n Variablen. Im Allgemeinen ist es sehr schwierig, Lösungen für die Gleichung

$$P(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

zu finden. Man stelle sich dazu einfach ein Polynom in 21 Variablen vom Grad 77 vor. Ist jedoch eine Nullstelle a gefunden (etwa durch geschicktes Raten), ist sie nützlich, wenn die partiellen Ableitungen einer Variable x_i in a ungleich 0 sind. Dann garantiert nämlich der Satz über implizite Funktionen, dass die Gleichung in einer Umgebung dieser Nullstelle a (zumindest näherungsweise) gelöst werden kann, indem x_i durch die übrigen Variablen ausgedrückt wird.

Verschwinden jedoch alle Ableitungen in a, solche Punkte heißen Singularitäten, so ist der Satz über implizite Funktionen nicht mehr anwendbar. Hier kann bestenfalls darauf gehofft werden, die Nullstellenmenge lokal um die Singularität durch eine Mannigfaltigkeit gleicher Dimension zu parametrisieren. Dies nennt man dann die Auflösung einer Singularität.

Betrachten wir als Beispiel das Polynom

$$P(x, y) = y^2 - x^2 - x^3 \in \mathbb{R}[x, y].$$

Die Nullstelle $(0, 0)$ ist schnell entdeckt, doch verschwinden hier beide partiellen Ableitungen, das heißt,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0) = (-2x - 3x^2)(0, 0) = 0 \text{ und } \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0) = (2y)(0, 0) = 0.$$

Damit ist der Ursprung eine (sogar die einzige) Singularität von P. Mit etwas Erfahrung lässt sich eine Parametrisierung der durch $P(x, y) = 0$ gegebenen Kurve herleiten:

1. Zeige, dass eine Gerade $y = tx + d$ oder die Gerade $x = a$ die Kurve in $0, 1, 2$ oder 3 Punkten schneidet.

2. Zeige, dass eine Gerade $y = tx$ durch den Ursprung die Kurve in genau einem anderen Punkt schneidet, wenn $t^2 \neq 1$ ist.

3. Schneide nun die Gerade $y = tx$ mit der Kurve $y^2 = x^3 + x^2$ und zeige, dass sich daraus folgende Parametrisierung π ergibt:

$$t \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t(t^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser Parametrisierung lässt sich die Kurve zeichnen, es ist die α-Schleife (siehe Abbildung 1):

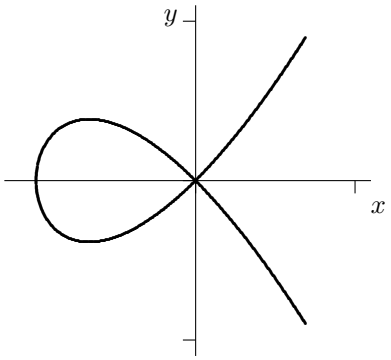


Abbildung 1 : Die α-Schleife.

Die Abbildung π ist eine polynomiale, überall definierte Abbildung von $\mathbb{R}$ auf die α-Schleife. Beachte: Die Punkte $t = -1$ und $t = 1$ werden in den singulären Punkt $(0, 0)$ der α-Schleife abgebildet. Die von π definierte Abbildung $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist bijektiv. Der singuläre Punkt ist durch zwei Punkte ersetzt worden. Außerhalb des singulären Punktes hat sich nichts geändert. Damit ist eine nichtsinguläre Kurve, nämlich $\mathbb{R}$, entstanden.

Die Abbildung π ist ein einfaches Beispiel für eine Auflösung einer Singularität. Betrachtet man den singulären Punkt der α-Schleife „aus der Nähe“, also in einer hinreichend kleinen Umgebung, wird auch klarer, warum dieser eine Punkt durch zwei Punkte ersetzt wurde: Die α-Schleife scheint nahe dem Ursprung zwei Komponenten zu besitzen (siehe Abbildung 2).

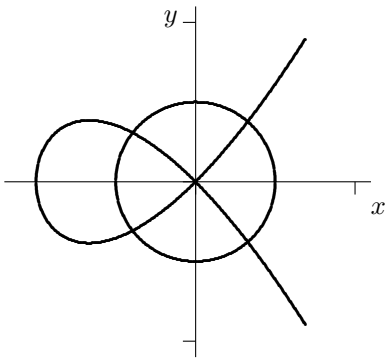


Abbildung 2 : Die Singularität der α-Schleife unter der Lupe.

Sie ähnelt der Kurve, die durch $f(x, y) = x^2 - y^2 = 0$ gegeben ist (siehe Abbildung 3).

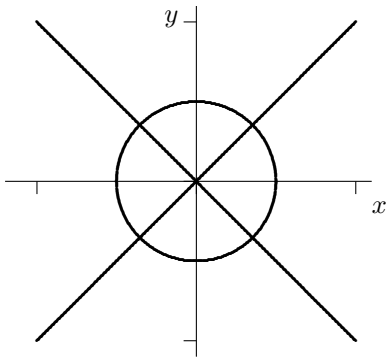


Abbildung 3 : Die durch $x^2 - y^2 = 0$ gegeben Kurve ähnelt in der Nähe des Ursprungs der α-Schleife.

Klarerweise besteht f wirklich aus zwei Komponenten, nämlich den Geraden $x = y$ und $x = -y$. Das Polynom f ist reduzibel und lässt sich schreiben als:

$$f(x, y) = (x + y)(x - y).$$

Dagegen ist $P(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ irreduzibel. Trotzdem lassen sich die zwei Komponenten der α-Schleife an ihrer definierenden Gleichung erkennen, wenn wir mit konvergenten Potenzreihen arbeiten. Denn es ist

$$P(x, y) = (y + x\sqrt{1 + x})(y - x\sqrt{1 + x})$$

und $g(x) = \sqrt{1 + x}$ lässt sich in einer Umgebung des Ursprungs in eine konvergente Potenzreihe entwickeln. In diesem Sinn ist es von Vorteil mit konvergenten Potenzreihen zu arbeiten. Über beliebigen Körpern verliert der Begriff der Konvergenz jedoch im Allgemeinen seine Bedeutung. Daher arbeitet man in der algebraischen Geometrie mit formalen Potenzreihen (siehe dazu Anhang A).

Zurück zur α-Schleife. Im Sinne der Auflösung der Singularität hat es sich als günstig erwiesen, den singulären Punkt der α-Schleife durch zwei Punkte zu ersetzen. Dies könnte man auch wie folgt bewerkstelligen: Finde eine Raumkurve A, deren Projektion die α-Schleife liefert. Da bereits eine Parametrisierung der zweidimensionalen Kurve gegeben ist, ist dies gar nicht so schwierig. Die naheliegende Parametrisierung

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t(t^2 - 1) \\ t \end{pmatrix}$$

besitzt alle gewünschten Eigenschaften einer Auflösung: Sie ist glatt und die Projektion in die xy-Ebene liefert die α-Schleife (siehe Abbildung 4).

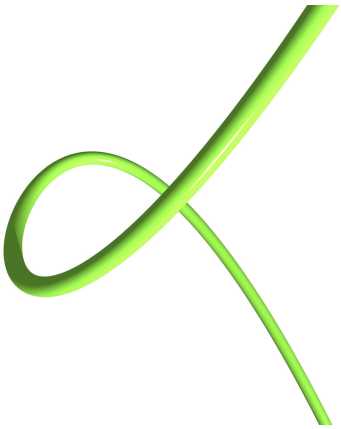


Abbildung 4 : Die Projektion dieser Raumkurve ist die α-Schleife.

Bei diesem Beispiel konnte die Singularität aufgelöst werden, da bereits eine Parametrisierung der Kurve gegeben war. Dies ist im Allgemeinen natürlich nicht der Fall. Doch folgende Beob-

achtung motiviert die Technik des Aufblasens einer Singularität: Die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 1, \\ y &= t(t^2 - 1), \\ z &= t, \end{aligned}$$

erfüllen die Beziehung:

$$z = \frac{y}{x}.$$

Der Wert $\frac{y}{x}$ gibt die Steigung jener Geraden an ,die den Ursprung und den Punkt (x, y) enthält. Wird jedem Punkt (x, y) in der Ebene die Höhe $\frac{y}{x}$ zugeordnet, so ergibt sich eine Schraube (siehe Abbildung 5).

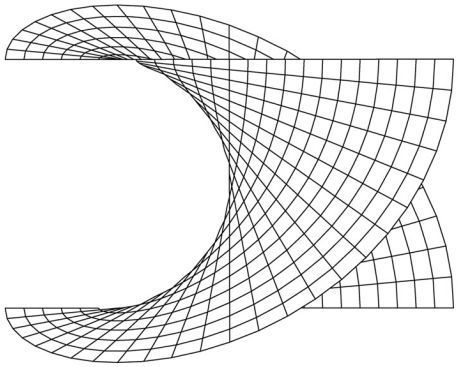


Abbildung 5 : Wird jedem Punkt (x, y) die Höhe $\frac{y}{x}$ zugeordnet, ergibt sich ein Schraube.

Der Zusammenhang zwischen dieser Schraube und der Raumkurve A wird klar, wenn wir den Zylinder C über der Nullstellenmenge von P, also

$$C = \big\{(x, y, z) \ : \ P(x, y) = 0\big\},$$

mit der Schraube schneiden (siehe Abbildung 6).

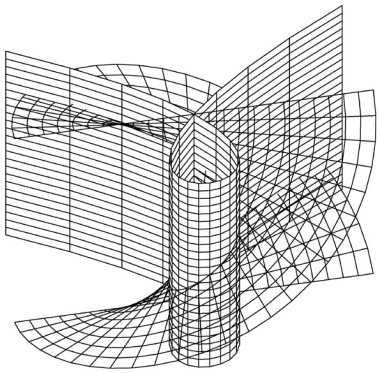


Abbildung 6 : Die Raumkurve A ergibt sich aus dem Schnitt des Zylinders über der α-Schleife mit der Schraube.

Der Schnitt entspricht fast genau der gewünschten Raumkurve A. Er entspricht der Vereinigung der Raumkurve A mit der z-Achse. Dieser kleine Schönheitsfehler kann umgangen werden, wenn die z-Achse weggelassen und von der verbleibenden Punktmenge (die Kurve A ohne Punkte auf der z-Achse) der topologische Abschluss gebildet wird. Dann ergibt sich wirklich die Raumkurve A von oben (siehe Abbildung 7).

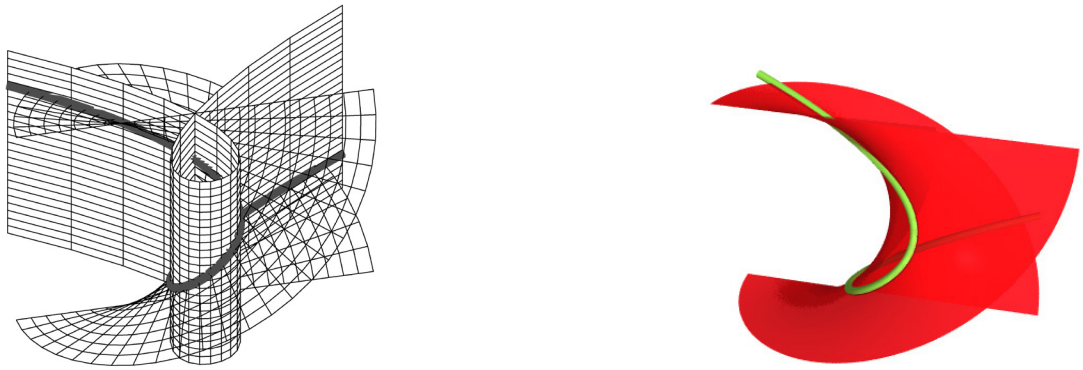


Abbildung 7: Die gewünschte Raumkurve.

Diese Methode werden wir gleich noch näher beschreiben. Sie wird „Aufblasen[1] eines Punktes in $\mathbb{A}^2$“ genannt und hat sich nicht nur in diesem Beispiel, sondern allgemein als *das* Werkzeug zum Auflösen von Singularitäten herausgestellt. Heisuke Hironaka hat dies in einer spektakulären Arbeit 1964 bewiesen (falls der zugrunde liegende Körper Charakteristik Null besitzt)(siehe [17]). Konstruktive Beweise stammen von Villamayor [23],[24], Bierstone-Milman [3], Encinas-Villamayor [8], [9], Encinas-Hauser [7] und Bravo-Villamayor [5]. Eine Implementierung findet man bei Bodnár-Schicho [4] und einen „handyman's guide“, sowie ausführliche Literaturangaben bietet die Arbeit von Hauser [12].

Nun zur genaueren Beschreibung der Technik des Aufblasens: Die Zuordnung des Wertes $\frac{y}{x}$ zum Punkt (x, y) stellt in gewisser Weise eine Bevorzugung dar, da ja auch $\frac{x}{y}$ als Steigung angesehen werden kann. Diese Bevorzugung lässt sich vermeiden, indem einem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ gleich die ganze Gerade durch den Punkt und den Ursprung bzw. der projektive Punkt $(x : y)$ zugeordnet wird. Dadurch ergibt sich die Menge:

$$X' \quad = \quad \big\{(x, y, (x : y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\big\}$$

Dies ist fast die Schraube von oben. Nur wird das obere Ende mit dem unteren identifiziert. Daher ist X' das Möbius-Band. Da es durch die reguläre Gleichung

$$X' = \big\{(x, y, (s : t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \ : \ xt = ys\big\}$$

beschrieben werden kann, ist das Möbius-Band eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Die übliche Koordinatenüberdeckung von $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ liefert eine Koordinatenüberdeckung für X':

$$\begin{aligned} U_0 &= \big\{(x, y, (s : t)) \in X' \ : \ s \neq 0, xt = ys\big\}, \\ U_1 &= \big\{(x, y, (s : t)) \in X' \ : \ t \neq 0, xt = ys\big\}. \end{aligned}$$

Die Projektion

$$\begin{aligned} \pi : X' = U_0 \cup U_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \big(x, y, (z_0 : z_1)\big) &\longrightarrow (x, y), \end{aligned}$$

ist damit in lokalen Koordinaten gegeben durch:

$$\begin{aligned} \pi : (x, y) &\longrightarrow (x, x \cdot \frac{t}{s}) =: (x, xy) \text{ auf } U_0, \\ \pi : (x, y) &\longrightarrow (y \cdot \frac{s}{t}, y) =: (xy, y) \text{ auf } U_1. \end{aligned}$$

Wir das Polynom $P(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ im Nullpunkt aufgeblasen, erhält man daher folgende Kartenausdrücke:

[1] Im Englischen spricht man von „blow up“. Ins Deutsche übersetzt heißt das eben „aufblasen“ oder „aufpumpen“. In der Photographie ist damit auch „vergrößern“ gemeint und bildlich könnte man auch von „explodieren“ oder von „in die Luft jagen“ sprechen. Zwar sind „Explosionen“ recht spektakulär, aber sie haben doch einen etwas gewalttätigen Beigeschmack. Daher verwende ich die übliche Übersetzung „Aufblasung“. Sie erinnert mehr an Luftballons und Spiele.

x-Karte: Ersetze (x, y) durch (x, xy) und erhalte den Kartenausdruck:

$$P_x(x, y) = P(x, xy) = x^2y^2 - x^3 - x^2.$$

y-Karte: Ersetze (x, y) durch (xy, y) und erhalte den Kartenausdruck:

$$P_y(x, y) = P(xy, y) = y^2 - x^3y^3 - x^2y^2.$$

Weiters lässt sich X' in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ als Abschluss des Graphen der Abbildung

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\to \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \\ (x, y) &\mapsto (x : y), \end{aligned}$$

darstellen. Dabei ordnet λ jedem Punkt p von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ die Gerade durch $(0,0)$ und p zu. Es ist also

$$X' = \overline{\left\{ \big((x, y), \lambda(x, y)\big) \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \right\}} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}),$$

was anhand der Definition von X' leicht nachzuprüfen ist.

Der Übergang von X zu $\pi : X' \to X$ nennt man Aufblasen des Nullpunktes. Die Aufblasungsabbildung $\pi : X' \to X$ ist die Einschränkung der Projektion $X \times \mathbb{P}^1 \to X$ (Projektion auf den ersten Faktor) auf X' gegeben. Der Nullpunkt heißt Zentrum Z der Aufblasung und $Y' := \pi^{-1}(Z)$ der exzeptionelle Ort. Er besteht aus jenen Punkten von X', in denen π kein Isomorphismus ist. Die Abbildung π kontrahiert den zweiten Faktor $\mathbb{P}^1$ von Y' entlang dem exzeptionellen Faktor zu einem Punkt. Analog definiert man das Aufblasen eines Punktes p.

Das Aufblasen eines Punktes ist ein rein lokaler Prozess. Deswegen lässt sich diese Technik leicht folgendermaßen verallgemeinern: Um einen beliebigen Punkt p in einer 2-dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M zu definieren, sei $\Phi : U \to V$ eine Kartenabbildung einer Umgebung U von p in M auf eine Umgebung V von 0 in $\mathbb{R}^2$, und $\pi : X' \to \mathbb{R}^2$ der oben beschriebene Prozess des Aufblasens im Nullpunkt von $\mathbb{R}^2$. Es sei V' die reelle Mannigfaltigkeit $V' := \pi^{-1}(0)$ vermöge der Abbildung $\pi^{-1} \circ \Phi : U \setminus \{p\} \to V' \setminus \pi^{-1}(0)$. Damit ist die Abbildung $\pi' : M' \to M$, gegeben durch die Identität auf $M' \setminus V'$ und durch $\Phi^{-1} \circ \pi$ auf V', die gesuchte Aufblasung von M in p. (Beachte: Ist Φ' eine andere Karte von M um p und führt man die oben beschriebene Aufblasungsoperation mit der Karte Φ' aus, so erhält man eine „aufgeblasene“ Mannigfaltigkeit $\pi'' : M'' \to M$. Man sieht leicht, dass es eine Äquivalenz $M' \cong M''$ gibt und damit ist M' im Wesentlichen eindeutig bestimmt.)

Der beschriebene Vorgang des Aufblasens lässt sich ebenso auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Auch ist es möglich, nicht nur Punkte als Zentren zu wählen. Um die Aufblasungsabbildung für ein beliebiges Zentrum Z zu definieren, ist es am besten, sich auf eine Umgebung eines Punktes $p \in Z$ zu beschränken. Um dies tun zu können, müssen wir lokale Koordinaten der Mannigfaltigkeit M wählen, die dann auch für p' in M' Koordinaten induzieren. Der Vorteil ist, dass wir M als affinen Raum $\mathbb{A}^n$ betrachten können mit $p = 0$ und dem Zentrum Z als Unterraum von $\mathbb{A}^n$, zum Beispiel als den d-dimensionalen Unterraum $\mathbb{A}^d \times 0^{n-d} \subseteq \mathbb{A}^n$.

1.2 Das leichte Polyederspiel

In diesem Abschnitt wird der kombinatorische Teil des Aufblasens von Singularitäten als Spiel mit Polyedern formuliert. Dieses leichte Polyederspiel wurde ursprünglich von Hironaka 1970 eingeführt (siehe [15]). Von Mark Spivakovsky wurde dann 1983 eine Lösung angegeben (das heißt eine Gewinnstrategie für den ersten Spieler, siehe [22]). Dies ist aus folgendem Grund interessant: Ziel ist es, eine Gewinnstrategie für das schwere Polyederspiel (siehe 1.3) zu finden, was einer (lokalen) Auflösung von Singularitäten in beliebiger Charakteristik gleichkommt. Jede Lösung des schweren Polyederspiels löst auch das leichte Polyederspiel. Daher könnte eine Gewinnstrategie für das leichten Polyederspiel zu einer Lösung des schweren Polyederspiels führen.

Die Aufblasung der α-Schleife $P(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$ im Nullpunkt ist in den Karten wie folgt gegeben:

x-Karte: Ersetze (x, y) durch (x, xy) und erhalte den Kartenausdruck:

$$P_x(x, y) = P(x, xy) = x^2y^2 - x^3 - x^2.$$

y-Karte: Ersetze (x, y) durch (xy, y) und erhalte den Kartenausdruck:

$$P_y(x, y) = P(xy, y) = y^2 - x^3y^3 - x^2y^2.$$

Die Auflösung der Singularität ist geglückt, wenn nach mehreren Aufblasungen jeder Kartenausdruck ein monomiales Polynom ist, das ist ein Polynom Q der Form

$$Q(x, y) = x^m y^n q(x, y) \text{ mit } q \in \mathbb{F}[x, y], q(0, 0) \neq 0.$$

Im Beispiel ist $P_x = x^2(-1+y^2-x)$ bereits monomial, nicht jedoch P_y. Daher muss mindestens noch einmal aufgeblasen werden. Rechnerisch fallen also bei jeder Aufblasung zwei Entscheidungen an:

1. Wahl des Zentrums.

2. Wahl der Karte.

Diese beiden Wahlmöglichkeiten können als Spielzüge zweier Spieler aufgefasst werden, wobei der erste Spieler die Zentren wählt und der zweite die Karte. Die Frage „Ist bei geeigneter Wahl der Zentren jeder Kartenausdruck monomial?“ geht dann in folgende Frage über: „Kann Spieler 1 die Zentren so wählen, dass unabhängig von der Wahl der Karte durch Spieler 2 ein monomiales Polynom erreicht wird?“

Weiters ist das Ersetzen von (x, y) durch (x, xy) bzw. (xy, y) nur der kombinatorische Teil des Aufblasungsvorganges, da sich in den Kartenausdrücken nur die Exponenten der Monome ändern (für den nichtkombinatorischen Teil siehe den folgenden Abschnitt 1.3). So geht zum Beispiel das Monom y^2 über in das Monom x^2y^2. Es genügt daher, nur den Träger des Polynoms zu betrachten. Der Träger $\mathrm{Tr}(f)$ einer Potenzreihe $f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ ist definiert durch

$$\mathrm{Tr}(f) := \{\alpha \in \mathbb{N}^n \,:\, c_\alpha \neq 0\}.$$

Im Beispiel sind das folgende Punkte im $\mathbb{N}^2$ (siehe Abbildung 8):

$$\mathrm{Tr}(y^2 - x^3 - x^2) = \big\{(0, 2), (3, 0), (2, 0)\big\}.$$

Den Träger von P_x erhält man aus dem Träger von P, indem man jeden Punkt $(a, b) \in \mathrm{Tr}(P)$ durch $(a + b, b)$ ersetzt (siehe Abbildung 8).

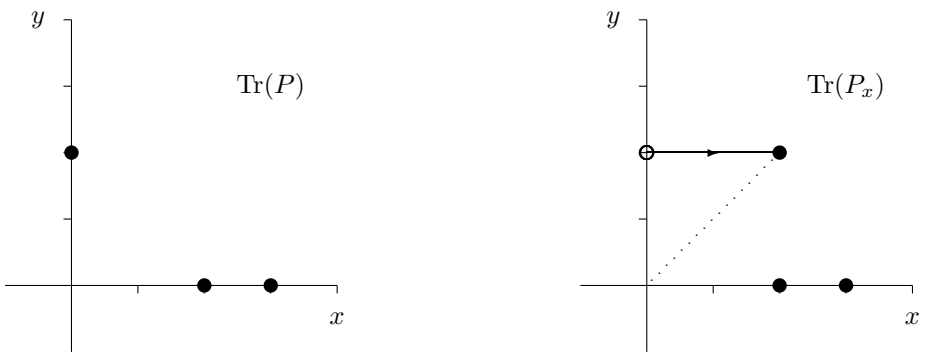


Abbildung 8: Träger von P und P_x.

Diese Beobachtungen motivieren das leichte Polyederspiel von Hironaka:

Spielregeln

Sei $A \subseteq \mathbb{N}^n$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$. Der zu A gehörige bzw. der von A erzeugte Newton-Polyeder $N(A)$ im $\mathbb{R}^n_+ := \{u \in \mathbb{R}^n \ : \ u_i \geq 0\}$ ist die positive konvexe Hülle von A, das heißt, die konvexe Hülle der Summe $A + \mathbb{R}^n_+$ (siehe Abbildung 9).

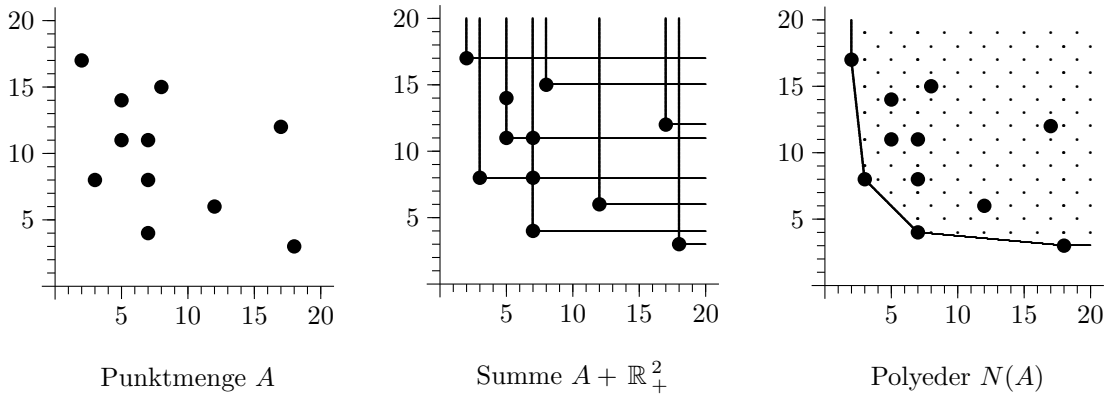


Abbildung 9 : Die Entstehung eines Newton Polyeders.

Sei weiters für ein nichtleeres $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $j \in J$ die lineare Abbildung

$$\tau_{J,j} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$$

wie folgt definiert: Die j-te Komponente eines Vektors wird durch die Summe jener Komponenten ersetzt, deren Index in J liegt. Die anderen Komponenten bleiben unverändert (siehe Abbildung 10). In Formeln: Für $p \in A$ ist $p' := \tau_{J,j}(p)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} p'_j &:= \sum_{k \in J} p_k, \\ p'_i &:= p_i \text{ für } i \neq j. \end{aligned}$$

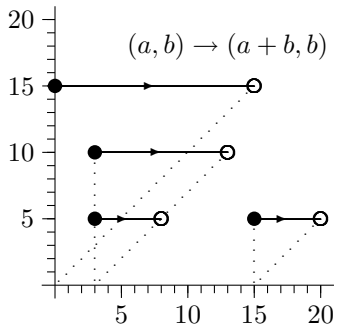


Abbildung 10 : Transformation der Punkte durch einen Spielzug.

Zwei Spieler machen folgende Züge:

1. Spieler 1 wählt unter Berücksichtigung von A bzw. $N(A)$ ein nichtleeres $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
2. Spieler 2 wählt unter Berücksichtigung von A und J ein $j \in J$ und ersetzt die Menge $A = \{a_1, \ldots, a_d\}$ durch die Menge

   $$A' := \tau_{J,j}(A) = \{\tau_{J,j}(a_1), \ldots, \tau_{J,j}(a_d)\}.$$

   (Und damit den Newton Polyeder $N(A)$ durch $N' = N(A')$.)

Dann wiederholen die beiden Spieler ihre Züge. Sei $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge der resultierenden Mengen, also $A^0 := A, A^1 := A', A^2 := A''$, usw. Spieler 1 gewinnt, wenn nach endlich vielen Zügen, etwa

m, der zu A^m gehörige Newton Polyeder $N^m := N(A^m)$ ein monomialer Polyeder ist. Das heißt, wenn es ein $a \in A^m$ gibt mit $N^m = a + \mathbb{R}^n_+$.

Problem: Zeige, dass Spieler 1 immer gewinnen kann, also eine Gewinnstrategie besitzt.

Dieses Problem wird in Kapitel 2 gelöst.

1.3 Das schwere Polyederspiel

Das schwere Polyederspiel wurde – wie das leichte Polyederspiel – ursprünglich von Hironaka eingeführt. Es sollte nicht nur den kombinatorischen Teil des Aufblasens modellieren, so wie das leichte Polyederspiel, sondern alle Details. Doch Hironaka formulierte sein schweres Polyederspiel so allgemein, dass Mark Spivakovsky ein Gegenbeispiel finden konnte (siehe [21]).

In diesem Abschnitt wird das schwere Polyederspiel einerseits so definiert, dass es die Technik des Aufblasens in allen Details modelliert, andererseits aber Spieler 2 nicht so viele Freiheiten erhält, dass das Spiel unlösbar wird.

Zuerst noch einmal das leichte Polyederspiel in etwas anderer Form: Gegeben sei nun ein Körper $\mathbb{F}$ und eine formale Potenzreihe $f \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ in fixierten Koordinaten, also

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha.$$

(Zu Potenzreihen und Substitutionshomomorphismen siehe Anhang A.) Weiters sei $\mathsf{T}_{J,j} : \mathbb{F}[[\mathbf{x}]] \to \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ für $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $j \in J$ der durch

$$\begin{aligned} x_k &\longrightarrow x_k x_j \text{ für } k \in J, k \neq j, \\ x_i &\longrightarrow x_i \text{ sonst,} \end{aligned}$$

gegebene Substitutionshomomorphismus.

Zwei Spieler machen folgende Spielzüge:

1. Spieler 1 wählt unter Berücksichtigung von f ein nichtleeres $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
2. Spieler 2 wählt unter Berücksichtigung von f und J ein $j \in J$ und ersetzt die formale Potenzreihe f durch die formale Potenzreihe $f' := \mathsf{T}_{J,j}(f)$.

Dann wiederholen die Spieler ihre Züge. Spieler 1 gewinnt, wenn nach endlich vielen Zügen eine monomiale Potenzreihe vorliegt, das heißt eine Potenzreihe g der Form

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\alpha \cdot \widetilde{g}(\mathbf{x}),$$

wobei für $\widetilde{g} \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ gilt

$$g(0) \neq 0.$$

Problem: Zeige, dass der Spieler 1 für jede formale Potenzreihe $f \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ eine Gewinnstrategie besitzt.

Es ist leicht einzusehen, dass dieses Spiel dem uns bekannten leichten Polyederspiel entspricht. Beachte, dass für

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$$

der Träger von f durch

$$\operatorname{Tr}(f) := \{\alpha \in \mathbb{N}^n \,:\, c_\alpha \neq 0\}$$

gegeben ist. Der von $\operatorname{Tr}(f)$ erzeugte Newton-Polyeder $N\big(\operatorname{Tr}(f)\big)$ im $\mathbb{R}^n_+ := \{u \in \mathbb{R}^n \,:\, u_i \geq 0\}$ ist die positive konvexe Hülle von $\operatorname{Tr}(f)$, das heißt die konvexe Hülle der Summe $\operatorname{Tr}(f) + \mathbb{R}^n_+$. Den von $\operatorname{Tr}(f)$ erzeugten Newton Polyeder bezeichnen wir in Zukunft mit $N(f)$ und nennen ihn den zu f gehörigen Newton Polyeder.

Der Übergang von $f(x)$ zu $f'(x) := \mathsf{T}_{J,j}(f)$ entspricht, wie leicht zu sehen ist, dem Übergang von $\operatorname{Tr}(f)$ zu $\tau_{J,j}\big(\operatorname{Tr}(f)\big)$. Das leichte Polyederspiel entspricht also dem oben definierten Spiel.

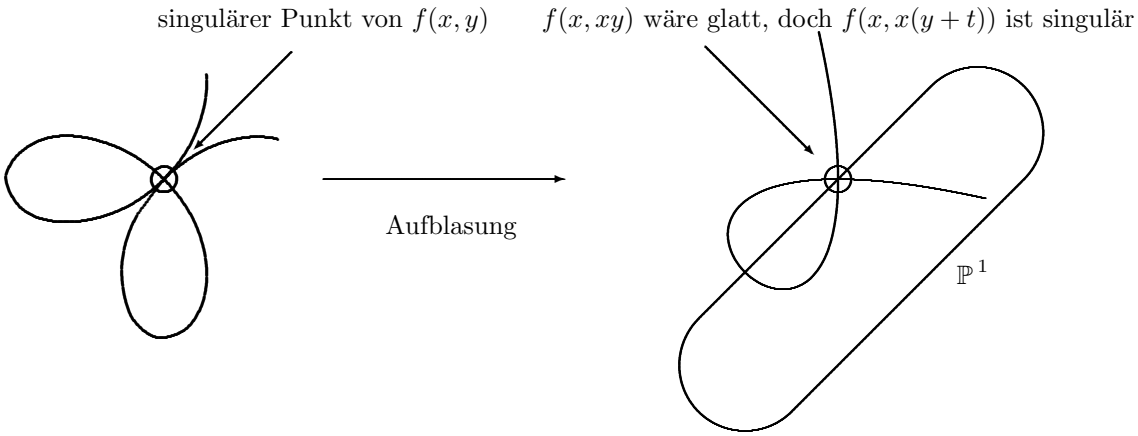


Abbildung 11 : Je nach Standpunkt kann der Kartenausdruck einer aufgeblasenen Kurve singulär sein, oder nicht.

Beachte dazu noch: Polyeder, die von unendlichen Mengen erzeugt werden, besitzen nur endlich viele Ecken. Dies ist eine Konsequenz aus dem Lemma von Dickson (siehe Hilfssatz B.1).

Nun zur Beschreibung des schweren Polyederspiels: Die Aufblasung f' einer Potenzreihe $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ ist ein Element von $\mathbb{F}^2 \times \mathbb{P}^1$. Der Kartenausdruck in der Karte

$$U_0 = \left\{(x, y, (1 : \frac{u}{v})) \ : \ y = x\frac{u}{v}, v \neq 0\right\}$$

ergibt sich, wie gezeigt, aus dem Ersetzen von (x,y) durch (x,xy) (mit $y := \frac{u}{v}$). Doch dies ist nur der Kartenausdruck im Punkt $(1 : \frac{u}{v})$. Die Darstellung von f' in der Karte U_0 im allgemeinen Punkt $(1 : \frac{u}{v} + t)$ ergibt sich damit durch das Ersetzen von (x,y) durch $(x, x(y+t))$. Abhängig von f und t kann $f(x,x(y+t))$ monomial sein oder nicht (siehe Abbildung 11). Im schweren Polyederspiel kann der Spieler 2 nicht nur die Karte wählen, sondern auch den „Standpunkt“ t.

Wie wir (im Beispiel 5) sehen werden, hätte der Spieler 1 durch diese Änderung des leichten Polyederspiels keine Chance mehr, das Spiel zu gewinnen. Daher modifizieren wir auch das Spielziel: Das Spiel endet, wenn nach einigen Spielzügen eine Potenzreihe g vorliegt, die entweder monomial ist, oder, wenn es einen Koordinatenwechsel $\psi \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{F}[[x,y]]\right)$ gibt, sodass $\psi(f)$ monomial ist. Diese zweite Modifikation ist auch mit dem Ziel vereinbar, eine Auflösung der Singularitäten zu erhalten, da es zu ψ eine Umkehrabbildung gibt. Kapitel 3 gibt eine Lösung für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ an und die Kapitel 4 und 5 beschäftigen sich mit dem schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$ und $\mathbb{N}^3$.

Spielregeln

Sei $\mathbb{F}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ eine formale Potenzreihe in $\mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ mit fixen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$. Das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$ ist nun wie folgt definiert:

Zwei Spieler machen folgende Züge:

1. Spieler 1 wählt ein nichtleeres $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
2. Spieler 2 wählt unter Berücksichtigung von F und J ein $j \in J$ und $t_i \in \mathbb{F}$ für $i \in J, i \neq j$. Dann ersetzt er F durch $F' := \varphi(F)$. Dabei sei φ der durch

$$\begin{array}{lcll} x_i & \longrightarrow & x_j x_i + t_i x_j & \text{für alle } i \in J, i \neq j, \\ x_k & \longrightarrow & x_k & \text{sonst,} \end{array}$$

   gegebene Substitutionshomomorphismus.

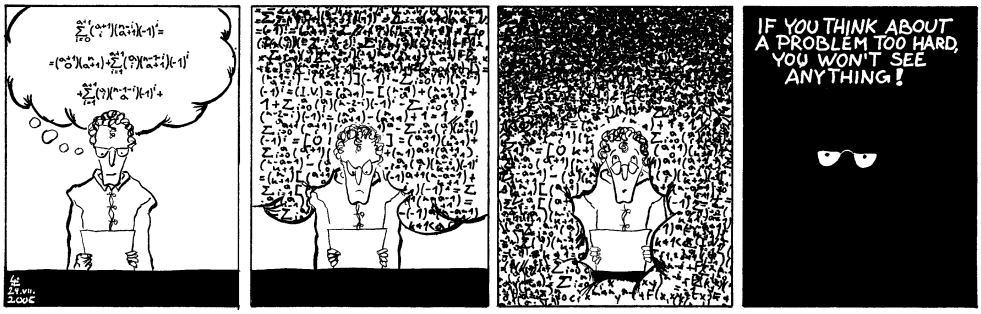
Dann wiederholen die beiden Spieler ihre Züge. Sei $(F^i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge der resultierenden Potenzreihen, also $F^0 := F, F^1 := F', F^2 := F''$, etc. Spieler 1 gewinnt, wenn nach endlich vielen Zügen, etwa m, die Potenzreihe F^m bis auf einen Koordinatenwechsel eine monomiale Potenzreihe ist. Das heißt, wenn es ein $\psi \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{F}\left[[\mathbf{x}]\right]\right)$ gibt mit

$$G := \psi(F^m) \text{ und } G(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\alpha Q(\mathbf{x}) \text{ mit } Q \in \mathbb{F}\left[[\mathbf{x}]\right], Q(0) \neq 0.$$

Problem: Zeige, dass Spieler 1 immer gewinnen kann.

Bemerkung: 1. Ist f bereits eine monomiale Potenzreihe, so kann man leicht zeigen, dass f auch nach einem weiteren Spielzug wieder monomial ist. In diesem Sinne ist es natürlich, das Spiel zu beenden, wenn die Potenzreihe monomial geworden ist.

2. Wird nach mehreren Spielzügen bzw. Aufblasungsschritten eine monomiale Potenzreihe, etwa x^2y^3, erreicht, sind aus der anfänglichen Kurve scheinbar mehrere Kurven entstanden (nämlich eine Vereinigung von Koordinatenachsen). Beachte aber, dass man eine Komponente, etwa y (abhängig von den Aufblasungen), als aufgelöst Kurve auswählen kann, da die anderen Komponenten durch „Niederblasen“ auf einen Punkt kontrahiert werden.



Kapitel 2

Das leichte Polyederspiel

Im Kapitel 1 wurde der kombinatorische Teil der Technik des Aufblasens als leichtes Polyederspiel formuliert. Das Vektorspiel entspricht dem leichten Polyederspiel mit Polyedern, die nur zwei Ecken besitzen. Dieses Kapitel zeigt, dass eine Lösung des Vektorspiels ausreicht, um das leichte Polyederspiel zu lösen.

Zur Erinnerung noch einmal die Definition des leichten Polyederspiels: Sei $A \subseteq \mathbb{N}^n$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$. Der zu A gehörige bzw. der von A erzeugte Newton-Polyeder $N(A)$ im $\mathbb{R}^n_+ := \{u \in \mathbb{R}^n : u_i \geq 0\}$ ist die positive konvexe Hülle von A, das heißt, die konvexe Hülle der Summe $A + \mathbb{R}^n_+$. Sei weiters für ein nichtleeres $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $j \in J$ die Funktion

$$\begin{aligned} \tau_{J,j} : \mathbb{Z}^n &\to \mathbb{Z}^n, \\ p &\mapsto p', \end{aligned}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} p'_j &:= \sum_{k \in J} p_k, \\ p'_i &:= p_i \text{ für } i \neq j. \end{aligned}$$

Die Funktion ersetzt also die j-te Komponente eines Vektors durch die Summe jener Komponenten, deren Index in J liegt, und lässt die anderen Komponenten unverändert (siehe Abbildung 10).

Zwei Spieler machen folgende Züge:

1. Spieler 1 wählt unter Berücksichtigung von A bzw. $N(A)$ ein nichtleeres $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
2. Spieler 2 wählt unter Berücksichtigung von A und J ein $j \in J$ und ersetzt die Menge $A = \{a_1, \ldots, a_d\}$ durch die Menge

   $$A' := \tau_{J,j}(A) = \{\tau_{J,j}(a_1), \ldots, \tau_{J,j}(a_d)\}.$$

   (Und damit den Newton Polyeder $N(A)$ durch $N' = N(A')$.)

Dann wiederholen die Beiden ihre Züge. Sei $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge der resultierenden Mengen, also $A^0 := A, A^1 := A', A^2 := A''$, usw. Spieler 1 gewinnt, wenn nach endlich vielen Zügen, etwa m, der zu A^m gehörige Newton Polyeder $N(A^m)$ ein monomialer Polyeder ist. Das heißt, wenn es ein $a \in A^m$ gibt mit $N(A^m) = a + \mathbb{R}^n_+$.

Problem: Zeige, dass Spieler 1 für jede endliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}^n$ eine Gewinnstrategie besitzt.

Folgendes Beispiel veranschaulicht einen möglichen Spielverlauf: Gegeben sei die Menge

$$A = \big\{(0,6), (3,2), (4,1), (8,0)\big\}.$$

Der von A erzeugte Newton-Polyeder $N(A)$ wird von allen vier Elementen von A erzeugt (siehe Abbildung 12). Spieler 1 wählt nun $J = \{1, 2\}$ und Spieler 2 wählt $j = 2$. Damit wird A ersetzt

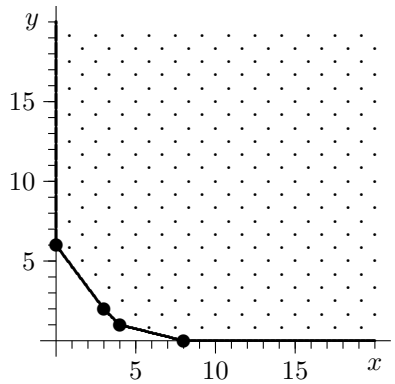


Abbildung 12: Der Polyeder $N(A)$.

durch

$$\begin{aligned} A^1 &= \tau_{J,j}(A) = \tau_{\{1,2\},2}(A) \\ &= \big\{\tau_{\{1,2\},2}(0,6), \tau_{\{1,2\},2}(3,2), \tau_{\{1,2\},2}(4,1), \tau_{\{1,2\},2}(8,0)\big\} \\ &= \big\{(0,6+0), (3,2+3), (4,1+4), (8,0+8)\big\} \\ &= \big\{(0,6), (3,5), (4,5), (8,8)\big\}. \end{aligned}$$

Damit hat Spieler 1 noch nicht gewonnen, denn der von A^1 erzeugte Newton-Polyeder ist nicht monomial. Denn er wird von $(0,6)$ und $(3,5)$ (oben grün geschriebenen) erzeugt (siehe Abbildung 13), das heißt,

$$N^1 = N(A^1) = N\Big(\big\{(0,6), (3,5)\big\}\Big).$$

Der weitere Spielverlauf könnte wie folgt aussehen (dabei sind diejenigen Elemente, die den

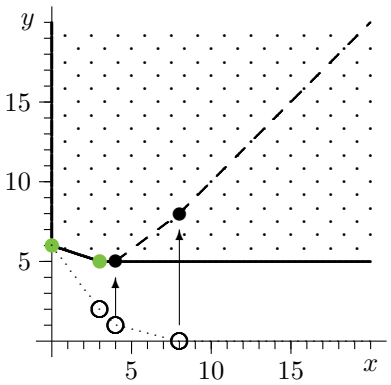


Abbildung 13: Der Polyder $N(A^1)$. Die leeren Kreise und gepunkteten Linien deuten den früheren Polyeder $N(A)$ an, die gestrichelten Linien die alten Kanten nach der Transformation.

zugehörigen Newton-Polyeder erzeugen, wieder grün geschrieben):
Mit $J = \{1,2\}$ und $j = 1$ ist (siehe Abbildung 14)

$$A^2 = \big\{(6,6), (8,5), (9,5), (16,8)\big\}$$

und für $J = \{1,2\}$ und $j = 1$ ist (siehe Abbildung 15)

$$A^3 = \big\{(12,6), (13,5), (14,5), (24,8)\big\}.$$

Schließlich ergibt sich für $J = \{1,2\}$ und $j = 2$

$$A^4 = \big\{(12,18), (13,18), (14,19), (24,32)\big\}.$$

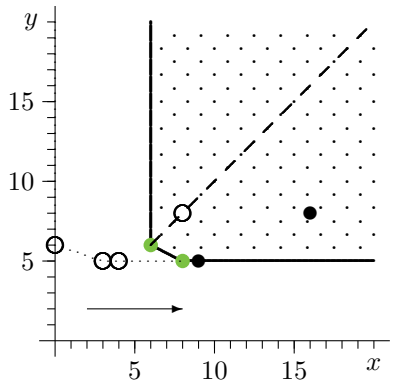


Abbildung 14: Der Polyeder $N(A^2)$.

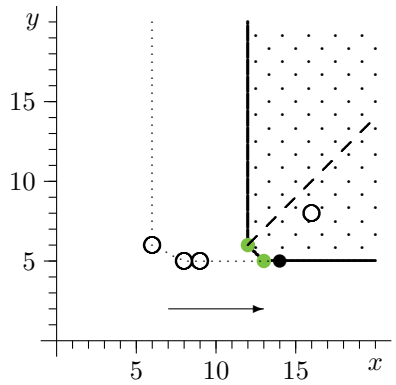


Abbildung 15: Der Polyeder $N(A^3)$.

Damit hat Spieler 1 gewonnen, denn der von A^4 erzeugte Newton-Polyeder $N(A^4)$ wird von einem einzigen Element (nämlich $(12, 18)$) erzeugt (siehe Abbildung 16). Die drei anderen Elemente von A^4 sind alle in der Menge $(12, 18) + \mathbb{R}_+^n$ enthalten.

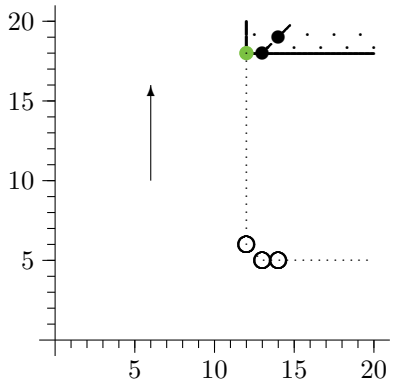


Abbildung 16: Der Polyeder $N(A^4)$ ist monomial.

Die naheliegende Frage lautet nun: Hätte der Spieler 2 den Sieg des Spielers 1 durch andere Züge verhindern können? Die Antwort ist Nein. Denn es gibt für Spieler 1 eine Gewinnstrategie.

Um dies zu beweisen, führen wir zunächst das Vektorspiel ein. Mit der Hilfe dieses Spiels zeigen wir dann, dass es eine Gewinnstrategie für den Spieler 1 für das leichte Polyederspiel gibt.

2.1 Das Vektorspiel

Das Vektorspiel entspricht dem leichten Polyederspiel, wenn nur mit Polyedern mit zwei Ecken α und β gespielt wird. Die für das Spiel wichtige Information steckt in diesen zwei Ecken, weil Punkte im Inneren des Polyeders keine Rolle spielen. Da es auch nur auf das „Aussehen“ des Polyeders ankommt und nicht auf seine Lage bezüglich dem Nullpunkt, genügt es statt der beiden Ecken einfach den Verbindungsvektor $\alpha - \beta$ zu betrachten. Dieser besitzt mindestens eine positive und eine negative Komponente, solange α und β wirklich Ecken sind. Ist aber der Verbindungsvektor $\alpha - \beta$ ein Element von $\mathbb{N}^n$ oder $-\mathbb{N}^n$, dann ist entweder $\alpha \in \beta + \mathbb{R}_+^n$ und damit β die einzige Ecke, oder umgekehrt ist α die einzige Ecke. Die Umformung der Spielregeln des Polyederspiels auf einen einzigen Vektor motiviert das Vektorspiel:

2.1.1 Spieldefinition

Gegeben sei ein Vektor $v \in \mathbb{Z}^n$ und wieder bezeichne $\tau_{J,j}$ für $J \subseteq \{1, \ldots, n\}, j \in J$ die Abbildung von Seite 16. (Sie ersetzt die j-te Komponente eines Vektors durch die Summe jener Komponenten, deren Indizes in J liegen, lässt die anderen Komponenten jedoch unverändert.)

Zwei Spieler machen folgende Züge:

1. Spieler 1 wählt unter Berücksichtigung von v ein nichtleeres $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
2. Spieler 2 wählt unter Berücksichtigung von v und J ein $j \in J$ und ersetzt v durch $v' := \tau_{J,j}(v)$.

Dann wiederholen die beiden Spieler ihre Züge. Sei $(v^i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge der resultierenden Vektoren, also $v^0 := v, v^1 := v', v^2 := v''$, etc. Spieler 1 gewinnt, wenn nach endlich vielen Zügen, etwa m, alle Komponenten des Vektors v^m dasselbe Vorzeichen besitzen, also

$$v^m \in \mathbb{N}^n \text{ oder } v^m \in -\mathbb{N}^n.$$

(Kürzer notiert als: $v^m \in \pm\mathbb{N}^n$.) Beachte, dass die Null sowohl positives als auch negatives Vorzeichen besitzt und somit die Rolle eines Jokers übernimmt.

Problem: Zeige, dass Spieler 1 für jeden Vektor $v \in \mathbb{Z}^n$ eine Gewinnstrategie besitzt.

2.1.2 Beispiel für das Vektorspiel

Folgendes Beispiel veranschaulicht einen möglichen Spielverlauf: Gegeben sei

$$v = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Spieler 1 wählt die Menge $J = \{1, 2, 3\}$ und Spieler P_2 antwortet mit $j = 3$. Um den neuen Vektor v' zu erhalten, wird die dritte Komponente von v durch 6 (das ist die Summe aller drei Komponenten) ersetzt:

$$v' = \tau_{J,j}(v) = \tau_{\{1,2,3\},3} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 8-6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Da $(8, -6, 6) \in \mathbb{N}^3$ ist, hat Spieler 1 noch nicht gewonnen. Der weitere Spielverlauf könnte wie folgt aussehen (der Übersichtlichkeit halber werden die Vektorklammern weggelassen):

$$\begin{matrix} 8 \\ -6 \\ 6 \end{matrix} \xrightarrow[j=3]{J=\{2,3\}} \begin{matrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow[j=1]{J=\{1,2\}} \begin{matrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow[j=2]{J=\{1,2\}} \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow[j=2]{J=\{1,2\}} \begin{matrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow[j=2]{J=\{1,2\}} \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}.$$

Damit hat Spieler 1 gewonnen. Die nahe liegende Frage ist nun: Hätte Spieler 2 den Sieg von Spieler 1 durch andere Züge verhindern können? Die Antwort lautet Nein, denn es gibt eine Gewinnstrategie für den Spieler 1. Diese wird im Abschnitt 2.1.3 angegeben. Davor jedoch noch ein kleiner Einschub:

Um nicht immer von Spieler 1 und Spieler 2 sprechen zu müssen, wollen wir zwei Figuren aus „Alice im Wunderland“ gegeneinander spielen lassen. Die Geschichte von „Alice im Wunderland“ [6] von Lewis Carroll (1832 – 1898) ist sehr bekannt. Weit weniger bekannt ist, dass Lewis Carroll das Pseudonym von Charles Lutwidge Dodgson ist. Dieser lehrte von 1855 bis 1881 Mathematik in Oxford und veröffentlichte neben anderen Geschichten und Gedichten auch einige mathematische Arbeiten [1]. Die Bedeutendste davon ist „Euklid and his Modern Rivals“ von 1879.

Nach dem Erfolg der Alice-Bücher gab Königin Victoria dem Geschichtenschreiber Carroll eine Audienz und trug ihm auf, ihr seine nächste Publikation zu senden. Sie war nicht sehr erfreut, als sie eine Veröffentlichung des Mathematikers Dodgson erhielt.

Doch zurück zum Vektorspiel. Als Spieler 1 setzen wir das weiße Kaninchen ein (siehe Abbildung 17), das es ja immer eilig hat. Zur Erinnerung zwei Passagen aus der Geschichte:

> ... when suddenly a White Rabbit with pink eyes ran close by her. There was nothing so very remarkable in that; nor did Alice think it so very much out of the

way to hear the Rabbit say to itself, „Oh dear! Oh dear! I shall be late!“ (when she thought it over afterwards, it occurred to her that she ought to have wondered at this, but at the time it all seemed quite natural); but when the Rabbit actually took a watch out of its waistcoat-pocket, and looked at it, and then hurried on, Alice started to her feet, for it flashed across her mind that she had never before seen a rabbit with either a waistcoat-pocket, or a watch to take out of it, and burning with curiosity, she ran across the field after it, and fortunately was just in time to see it pop down a large rabbit-hole under the hedge.

⋮

After a time she heard a little pattering of feet in the distance, and she hastily dried her eyes to see what was coming. It was the White Rabbit returning, splendidly dressed, with a pair of white kid gloves in one hand and a large fan in the other: he came trotting along in a great hurry, muttering to himself as he came, „Oh! the Duchess, the Duchess! Oh! won't she be savage if I've kept her waiting!“

Abbildung 17 : Kaninchen und Hutmacher

Lewis Carroll hat die Uhr des Kaninchens nicht näher beschrieben. Wir können uns daher vorstellen, dass sie nur einen einzigen Zeiger besitzt, dessen Position vom Vektor v aus dem Vektorspiel beschrieben wird. Dass sich der Zeiger sogar in mehr als nur drei Dimensionen befinden kann, sollte im Wunderland nicht weiter seltsam erscheinen. Zum großen Leidwesen des Kaninchens ist nun seine Uhr kürzlich stehen geblieben. Zwar ist es ihm gelungen, sie wieder aufzuziehen, aber mit dem Einstellen des Zeigers benötigt es Hilfe. Der Einzige im Wunderland, der sich mit Uhren halbwegs auskennt, ist der verrückte Hutmacher, den wir als Spieler 2 einsetzen (siehe Abbildung 17). Seine Kompetenz in Sachen Uhren und Zeit belegen folgende zwei Textpassagen:

The Hatter was the first to break the silence. „What day of the month is it?“ he said, turning to Alice: he had taken his watch out of his pocket, and was looking at it uneasily, shaking it every now and then, and holding it to his ear. Alice considered a little, and then said „The fourth.“ „Two days wrong!“ sighed the Hatter. „I told you butter wouldn't suit the works!“ he added looking angrily at the March Hare. „It was the best butter,“ the March Hare meekly replied. „Yes, but some crumbs must have got in as well,“ the Hatter grumbled: „you shouldn't have put it in with the bread-knife.“ The March Hare took the watch and looked at it gloomily: then he dipped it into his cup of tea, and looked at it again: but he could think of nothing better to say than his first remark, „It was the best butter, you know.“ Alice had been looking over his shoulder with some curiosity. „What a funny watch!“ she remarked. „It tells the day of the month, and doesn't tell what o'clock it is!“ „Why should it?“ muttered the Hatter. „Does your watch tell you what year it is?“ „Of course not,“ Alice replied very readily: „but that's because it stays the same year for such a long time together.“ „Which is just the case with mine,“ said the Hatter.

> Alice felt dreadfully puzzled. The Hatter's remark seemed to have no sort of meaning in it, and yet it was certainly English. „I don't quite understand you," she said, as politely as she could.
>
> ⋮
>
> „If you knew Time as well as I do," said the Hatter, „you wouldn't talk about wasting it. It's him." „I don't know what you mean," said Alice. „Of course you don't!" the Hatter said, tossing his head contemptuously. „I dare say you never even spoke to Time!" „Perhaps not," Alice cautiously replied: „but I know I have to beat time when I learn music." „Ah! that accounts for it," said the Hatter. „He won't stand beating. Now, if you only kept on good terms with him, he'd do almost anything you liked with the clock. For instance, suppose it were nine o'clock in the morning, just time to begin lessons: you'd only have to whisper a hint to Time, and round goes the clock in a twinkling! Half-past one, time for dinner!" („I only wish it was," the March Hare said to itself in a whisper.) „That would be grand, certainly," said Alice thoughtfully: „but then – I shouldn't be hungry for it, you know." „Not at first, perhaps," said the Hatter: „but you could keep it to half-past one as long as you liked."

Nun ist es auch verständlich, dass sich das Kaninchen mit seinem Uhrenproblem zum Hutmacher begibt, ihm aber kein sehr großes Vertrauen entgegenbringt. Daher erlaubt es ihm nur gewisse Veränderungen an der Uhr vorzunehmen (Vorgabe der Menge J). Da der Hutmacher völlig unberechenbar ist (er wählt $j \in J$), muss das Kaninchen sehr sorgfältig vorgehen, um eine gewünschte Zeigerposition ($v \in \mathbb{N}^n$ oder $-v \in \mathbb{N}^n$) zu erhalten. Da es das Kaninchen eilig hat, muss der Hutmacher außerdem noch in endlich vielen Schritten mit dem Einstellen der Uhr fertig sein.

2.1.3 Lösung des Vektorspiels

Das Vektorspiel in $\mathbb{Z}$ ist aufgrund der Definition bereits gewonnen. Das Spiel in $\mathbb{Z}^2$ ist sehr leicht zu lösen, liefert aber auch die Idee zur Lösung des Vektorspiels in beliebiger Dimension.

Vektorspiel in $\mathbb{Z}^2$

Sei $v \in \mathbb{Z}^2$ mit $v \notin \pm\mathbb{N}^2$.

Satz: *Spielt das Kaninchen immer $J = \{1, 2\}$, so gewinnt es das Vektorspiel in $\mathbb{Z}^2$.*

Beweis. Wir definieren im Folgenden eine Abbildung $b : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$, die jedem Vektor $v \in \mathbb{Z}^2$ eine natürliche Zahl zuordnet und folgende Eigenschaft besitzt: Ist $v \in \pm\mathbb{N}^2$, so ist $b(v) = 0$. Ist hingegen $v \notin \pm\mathbb{N}^2$ und v' der Vektor nach einem Spielzug, so ist

$$b(v') < b(v).$$

Sei $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der in einem Spiel entstehenden Vektoren (wobei das Kaninchen mit der oben angegebenen Strategie spielt, der Hutmacher mit einer beliebigen Strategie). Da $\mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung wohlgeordnet ist, muss die Folge

$$\big(b(v^m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$$

stationär werden. Das heißt, es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $v^k \in \pm\mathbb{N}^2$ ist für alle $k \geq m$. Damit hat das Kaninchen gewonnen.

Die Abbildung $b : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ sei für einen Vektor $v = (v_1, v_2)$ gegeben durch:

$$b(v) := \begin{cases} 0 & \text{für } v \in \pm\mathbb{N}^2, \\ |v_1| + |v_2| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $w \in \mathbb{Z}^2, w \notin \pm\mathbb{N}^2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gibt es $c, d \in \mathbb{N}, c, d \neq 0$, so dass

$$w = (c, -d)$$

ist. Damit ist

$$b(c, -d) = c + d.$$

Wählt der Hutmacher $j = 1$, dann ist

$$w' = (c - d, -d).$$

Nun ist entweder $c - d \leq 0$ und das Kaninchen hat gewonnen, da dann $w' \in -\mathbb{N}^2$ ist. Oder es ist $c - d > 0$ und

$$b(w') = c - d + d = c < c + d = b(w).$$

Analog zeigt man für $j = 2$, dass $w' = (c, c - d) \in \mathbb{N}^2$ oder $b(w') < b(w)$ ist. ☺

Vektorspiel in $\mathbb{Z}^n$

Im Beweis, dass $J = \{1, 2\}$ eine Gewinnstrategie des Kaninchens in $\mathbb{Z}^2$ ist, hat die Summe der Beträge der Komponenten des Vektors eine entscheidende Rolle gespielt. Bei der Gewinnstrategie des Kaninchens in $\mathbb{Z}^2$ ist diese Summe nach jedem Zug kleiner geworden (falls das Spiel noch nicht vom Kaninchen gewonnen wurde). Leider ist das für Vektoren mit mehr als zwei Komponenten nicht mehr der Fall, wie folgendes Beispiel zeigen soll: Sei

$$v = (1, 2, -10).$$

Wir betrachten alle für eine Gewinnstrategie in Frage kommenden Wahlen einer Menge J und zeigen, dass für ein spezielles $j \in J$ die Summe der Beträge des neuen Vektors $\tau_{J,j}(v)$ immer größer ist, als beim Vektor v. Beachte, dass einelementige Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$ nicht für eine Gewinnstrategie geeignet sind, da sich der Vektor nicht verändern würde. Sei nun noch $b : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{N}$ jene Funktion, die einem Vektor die Summe der Beträge seiner Komponenten zuordnet.

Für $J = \{1, 2\}$ und $j = 1$ ist dann

$$v' = (3, 2, -10), \text{ also } b(v') = 15 > 13 = b(v).$$

Für $J = \{1, 3\}$ ist für $j = 1$

$$v' = (-9, 2, -10), \text{ also } b(v') = 21 > 13 = b(v).$$

Für $J = \{2, 3\}$ ist für $j = 2$

$$v' = (1, -8, -10), \text{ also } b(v') = 19 > 13 = b(v).$$

Für $J = \{1, 2, 3\}$ ist für $j = 1$

$$v' = (-7, 2, -10), \text{ also } b(v') = 19 > 13 = b(v).$$

Die Summe der Beträge ist also nicht geeignet. Eine spezielle „Länge“ wird aber das gewünschte liefern: Tragen wir die einzelnen Komponenten des Vektors $v = (1, 2, -10)$ auf der Zahlengerade auf, so ist -10 ganz links und 2 ganz rechts (siehe Abbildung 18).

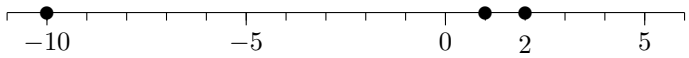


Abbildung 18 : Die Komponenten des Vektors v auf der Zahlengerade.

Aufgrund dieses Bildes ist es naheliegend, als Länge des Vektors

$$2 - (-10) = \max v_i - \min v_i = 12$$

zu definieren. Beim Spielzug $J = \{2, 3\}$ fällt dann tatsächlich die Länge, da sich entweder $v_1' = (1, -8, -10)$ mit Länge $1 - (-10) = 11 < 12$ oder $v_2' = (1, 2, -8)$ mit Länge $2 - (-8) = 10 < 12$ ergibt. Diese Idee reicht auch fast schon aus. Um noch Vektoren der Form $v = (2, 2, -10)$, bei denen die Länge nicht notwendigerweise fällt, in den Griff zu bekommen, werden wir im Folgenden auch noch das „Volumen“ eines Vektors definieren.

Definition : Sei $v \in \mathbb{Z}^n$.

1. Die Länge $\mathsf{L}(v)$ des Vektors v ist definiert durch:
$$\mathsf{L}(v) := \max_{1\le i\le n} v_i - \min_{1\le i\le n} v_i.$$
2. Das Volumen $\mathsf{V}(v)$ des Vektors v ist definiert durch die Anzahl jener Komponenten, die zwischen der minimalen und der maximalen Komponente liegen, also:
$$\mathsf{V}(v) := \#\{j \ : \ 1 \le j \le n, \min v_i < v_j < \max v_i\}.$$

Für den Vektor
$$v = (-10, -5, -3, -3, 0, 0, 1, 2, 2) \in \mathbb{Z}^9$$
ist zum Beispiel
$$\mathsf{L}(v) = 2 - (-10) = 12 \text{ und } \mathsf{V}(v) = \#\{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = 6.$$
Beachte weiters, dass immer gilt:
$$0 \le \mathsf{V}(v) \le n - 2.$$
Nun zur Gewinnstrategie für das Vektorspiel in beliebiger Dimension:

Satz 1 : *Sei $v \in \mathbb{Z}^n$ und $v \notin \pm\mathbb{N}^n$. Seien weiters $k = k(v), l = l(v)$ so, dass gilt*
$$v_k = \min_{1\le i\le n} v_i \text{ und } v_l = \max_{1\le i\le n} v_i.$$
Dann ist
$$J = \{k, l\}$$
eine Gewinnstrategie des Kaninchens für das Vektorspiel in $\mathbb{Z}^n$.

Beweis. Analog zum Beweis für die Gewinnstrategie in $\mathbb{Z}^2$ definieren wir im Folgenden eine Abbildung $b : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{N}^2$, die jedem Vektor $v \in \mathbb{Z}^n$ ein Tupel natürlicher Zahlen zuordnet und folgende Eigenschaft besitzt: Ist $v \in \pm\mathbb{N}^n$, so ist $b(v) = (0, 0)$. Ist hingegen $v \notin \pm\mathbb{N}^n$ und $v^1 = v'$ der Vektor nach einem Spielzug mit der oben definierten Strategie des Kaninches und einer beliebigen Strategie des Hutmachers, so ist
$$b(v') <_{\text{lex}} b(v).$$
(Dabei ist $<_{\text{lex}}$ die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N}^2$ mit $(0, 1) \le (1, 0)$.) Sei $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der Spielzüge. Da $(\mathbb{N}^2, <_{\text{lex}})$ eine wohlgeordnete Menge ist, muss die Folge
$$\big(b(v^m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$$
stationär werden. Das heißt, es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $v^k \in \pm\mathbb{N}^s$ ist für alle $k \ge m$. Damit hat das Kaninchen gewonnen.
Die Abbildung $b : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{N}^2$ sei für einen Vektor v gegeben durch:
$$b(v) := \begin{cases} (0, 0) & \text{für } v \in \pm\mathbb{N}^n, \\ \big(\mathsf{L}(v), n - \mathsf{V}(v)\big) & \text{sonst.} \end{cases}$$
Sei nun $w \in \mathbb{Z}^n, w \notin \pm\mathbb{N}^n$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit
$$w_1 = \min w_i < 0 \text{ und } w_2 = \max w_i > 0.$$
Damit ist
$$b(w) = (w_2 - w_1, n - \mathsf{V}(w)),$$
wobei $0 \le \mathsf{V}(w) \le n - 2$ ist. Das Kaninchen wählt $J = \{1, 2\}$. Spielt der Hutmacher $j = 1$, dann ist
$$w' = (w_1 + w_2, w_2, \ldots).$$

Beachte, dass

$$w_1 < w_1 + w_2 < w_2$$

ist. Also gilt entweder

$$\mathsf{L}(w') < \mathsf{L}(w),$$

oder es ist $\mathsf{L}(w') = \mathsf{L}(w)$ und $\mathsf{V}(w') = \mathsf{V}(w) + 1$. Dann ist aber

$$n - \mathsf{V}(w') < n - \mathsf{V}(w)$$

und daher ist insgesamt

$$b(w') <_{\text{lex}} b(w).$$

Analog zeigt man auch für $j = 2$, dass $b(w') <_{\text{lex}} b(w)$ ist und wir sind fertig. ☺

Beispiel: Im Folgenden ein möglicher Spielverlauf unter Verwendung der oben definierten Strategie. Neben dem jeweiligen Vektor sind immer Länge, Volumen und das Tupel $b(v)$ angegeben.

$$\begin{matrix}4\\4\\-5\\-6\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=10\\ \mathsf{V}=1\\ b=(10,3)\end{matrix}\quad \xrightarrow[j=2]{J=\{2,4\}}\quad \begin{matrix}4\\-2\\-5\\-6\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=10\\ \mathsf{V}=2\\ b=(10,2)\end{matrix}\quad \xrightarrow[j=4]{J=\{1,4\}}$$

$$\begin{matrix}4\\-2\\-5\\-2\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=9\\ \mathsf{V}=2\\ b=(9,2)\end{matrix}\quad \xrightarrow[j=3]{J=\{1,3\}}\quad \begin{matrix}4\\-2\\-1\\-2\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=6\\ \mathsf{V}=1\\ b=(6,3)\end{matrix}\quad \xrightarrow[j=2]{J=\{1,2\}}$$

$$\begin{matrix}4\\2\\-1\\-2\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=6\\ \mathsf{V}=2\\ b=(6,2)\end{matrix}\quad \xrightarrow[j=1]{J=\{1,4\}}\quad \begin{matrix}2\\2\\-1\\-2\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=4\\ \mathsf{V}=1\\ b=(4,3)\end{matrix}\quad \xrightarrow[j=1]{J=\{1,4\}}$$

$$\begin{matrix}0\\2\\-1\\-2\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=4\\ \mathsf{V}=2\\ b=(4,2)\end{matrix}\quad \xrightarrow[j=4]{J=\{2,4\}}\quad \begin{matrix}0\\2\\-1\\0\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=3\\ \mathsf{V}=2\\ b=(3,2)\end{matrix}\quad \xrightarrow[j=2]{J=\{2,3\}}$$

$$\begin{matrix}0\\1\\-1\\0\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=2\\ \mathsf{V}=2\\ b=(2,2)\end{matrix}\quad \xrightarrow[j=3]{J=\{2,3\}}\quad \begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mathsf{L}=1\\ \mathsf{V}=0\\ b=(0,0)\end{matrix}$$

Bemerkung: Überlegungen zum Vektorspiel in $\mathbb{R}^n$ und zur Komplexität des Vektorspiels finden sich im Anhang C.

2.2 Lösung des leichten Polyederspiels

Satz 2: *Es gibt eine Gewinnstrategie für das Kaninchen im leichten Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$.*

Beweis. Wir geben zuerst die Wahl des Kaninchens an und zeigen dann, dass sie zum Sieg führt.

Sei $A = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ und $N = N(A)$ der zu A gehörende Newton Polyeder. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei A die Menge der Ecken von N. Betrachte nun die Menge V aller Vektoren zwischen den Ecken von N:

$$V := \{a - b \ : \ a, b \in A\}.$$

Sei weiters $v_A \in V$ so, dass $\big(\mathsf{L}(v_A), n - \mathsf{V}(v_A)\big)$ minimal ist, das heißt, es gilt für alle $w \in V$:

$$\big(\mathsf{L}(v_A), n - \mathsf{V}(v_A)\big) \leq_{\text{lex}} \big(\mathsf{L}(w), n - \mathsf{V}(w)\big).$$

Wie im Vektorspiel seien nun $k := k(A) := k(v_A)$ und $l := l(A) := l(v_A)$ so, dass gilt:

$$v_{Ak} = \min_{1 \leq i \leq n} v_{Ai} \text{ und } v_{Al} = \max_{1 \leq i \leq n} v_{Ai}.$$

Dann wähle das Kaninchen

$$J = \{k, l\}.$$

Um nun zu zeigen, dass die angegebene Wahl des Kaninchens zum Sieg im leichten Polyederspiel führt, definieren wir analog zum Beweis für die Gewinnstrategie des Vektorspiels im Folgenden eine Abbildung b, die jedem Polyeder N bzw. der Eckenmenge A ein Tripppel natürlicher Zahlen zuordnet und folgende Eigenschaft besitzt: Ist N monomial, so ist $b(N) = (0, 0, 0)$. Ist hingegen N nicht monomial und $N^1 = N' := N(A')$ der Polyeder nach einem Spielzug mit der oben definierten Strategie des Kaninches und einer beliebigen Strategie des Hutmachers, so ist

$$b(N') <_{\text{lex}} b(N).$$

(Dabei ist $<_{\text{lex}}$ die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N}^3$ mit $(0, 0, 1) \leq (0, 1, 0) \leq (1, 0, 0)$.) Sei $(N^m)_{m \in \mathbb{N}}$ die Folge der Spielzüge. Da $(\mathbb{N}^3, <_{\text{lex}})$ eine wohlgeordnete Menge ist, muss die Folge

$$\big(b(N^m)\big)_{m \in \mathbb{N}}$$

stationär werden. Das heißt, es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass N^k monomial ist für alle $k \geq m$. Damit hat das Kaninchen gewonnen.

Sei A die Menge der Ecken des Polyeders N und der Vektor v_A wie oben beschrieben. Dann ist die Abbildung b gegeben durch:

$$b(N) := \begin{cases} (0, 0, 0) & \text{für } n \text{ monomial,} \\ \big(\#A, \mathsf{L}(v_A), n - \mathsf{V}(v_A)\big) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Dabei bezeichnet $\#A$ die Anzahl der Elemente von A.) Sei nun und ohne Beschränkung der Allgemeinheit v_A so dass gilt:

$$v_{A1} = \min v_{Ai} < 0 \text{ und } v_{A2} = \max v_{Ai} > 0.$$

Damit ist

$$b(N) = (\#A, v_{A2} - v_{A1}, n - \mathsf{V}(v_A)).$$

Das Kaninchen wählt $J = \{1, 2\}$. Der Hutmacher spiele $j = 1$. Ist $\#A' < \#A$, so sind wir fertig. (Beachte, dass immer $\#A' \leq \#A$ ist. Dies folgt im Wesentlichen aus der Linearität von $\tau_{J,j}$. Für einen ausführlicheren Beweis siehe Hilfssatz 74 im Anhang B.) Ist $\#A' = \#A$, so ist A' die Menge der Ecken von N' und für jede Ecke $a' \in A'$ gibt es ein Ecke $a \in A$, so dass $a' = \tau_{J,j}(a)$ ist. Gilt $v_A = a - b$ für zwei Ecken $a, b \in A$, so gilt für den Vektor $w := a' - b'$

$$\big(\mathsf{L}(w), n - \mathsf{V}(w)\big) <_{\text{lex}} \big(\mathsf{L}(v_A), n - \mathsf{V}(v_A)\big).$$

(Dies folgt wie im Beweis von Hilfssatz 1.) Da aber nach Definition

$$\big(\mathsf{L}(v_{A'}), n - \mathsf{V}(v_{A'})\big) \leq_{\text{lex}} \big(\mathsf{L}(w), n - \mathsf{V}(w)\big)$$

gilt, folgt die Behauptung.

Analog zeigt man die Behauptung für $j = 2$. ☺

Bemerkung 3: Mark Spivakovsky gab in seiner Arbeit [22] von 1983 eine Lösung für das leichte Polyederspiel von Hironaka an. Im Folgenden stellen wir seine Gewinnstrategie, die wir als Spivakovsky-Strategie bezeichnen wollen, kurz vor und vergleichen sie dann mit der oben angegebenen Gewinnstrategie, die wir mit Vektor-Strategie bezeichnen.

Um die Wahl $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ des Kaninchens bei der Spivakovsky-Strategie angeben zu können, benötigen wir folgende Definitionen. (Zur Veranschaulichung siehe Abbildung 19.)

Definition : Gegeben sei ein Newton Polyeder $N \subseteq \mathbb{R}_+^n$ mit Eckenmenge E.

1. Der Vektor $\omega(N) = (\omega_1(N), \ldots, \omega_n(N)) \in \mathbb{R}_+^n$ sei für $i = 1, \ldots, n$ definiert durch
$$\omega_i := \min\{a_i \ : \ (a_1, \ldots, a_n) \in E\}.$$

2. Sei $\widetilde{N}$ der um $\omega(N)$ verschobene Polyeder, also
$$\widetilde{N} := N - \omega(N).$$
(Damit ist $\omega(\widetilde{N}) = (0, \ldots, 0)$.) Ebenso sei für eine Ecke a von N
$$\widetilde{a} := a - \omega(N).$$

3. Sei $d(N)$ der kleinste „Abstand“ einer Ecke von N zum Ursprung, genauer:
$$d(N) := \min\{\sum_{i=1}^{n} a_i \ : \ a \in E\}.$$
(Der Wert $d(\widetilde{N})$ ist der erste wichtige Wert, der für N charakteristisch ist.)

4. Wir definieren eine Partition von $\{1, \ldots, n\}$ wie folgt:
$$\begin{array}{rcl} S(N) & := & \big\{i \in \{1, \ldots, n\} \ : \ \text{es gibt } a \in E \text{ mit } a_1 + \ldots + a_n = d(N) \text{ und } \widetilde{a}_i \neq 0\big\}, \\ I_1(N) & := & \{1, \ldots, n\} \setminus S(N). \end{array}$$

5. Wir definieren den Polyeder $N_1 \subseteq \mathbb{R}_+^{I_1}$. Dieser entsteht aus N durch eine spezielle Projektion. Genauer: Sei $\widetilde{a}$ einen Ecke von $\widetilde{N}$ mit $\sum_{i \in S(N)} a_i < d(\widetilde{N})$. Wir schreiben $\widetilde{a} = (b, c)$, mit $b \in \mathbb{R}_+^{I_1}$ und $c \in \mathbb{R}_+^{S(N)}$. Dann sei
$$N_1 := P_{S(N)}(\widetilde{a}) = P_{S(N)}(b, c) := \frac{b}{d(\widetilde{N}) - \sum c_i} \cdot d(\widetilde{N})!.$$
(Der Faktor $d(\widetilde{N})!$ dient nur dazu, dass $P_{S(N)}(\widetilde{a}) \in \mathbb{N}^{I_1}$ ist.)

Definiere nun induktiv $N_1, N_2, \ldots, N_r$ und $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_r$, mit r so, dass $d(\widetilde{N_r}) = 0$ oder $N_r = \emptyset$ ist. Dann ist die Wahl J des Kaninchens nach der Spivakovsky Strategie gegeben durch:

- Ist $N_r = \emptyset$, dann ist $J = \{1, \ldots, n\} \setminus I_r$.
- Ist $N_r \neq \emptyset$ und $k \in I_r$, dann sei $J = \big(\{1, \ldots, n\} \setminus I_r\big) \cup \{k\}$.

Beispiel : Wir betrachten den Newton Polyeder N, der durch die Menge
$$E := \big\{(3, 7), (6, 5), (10, 4)\big\}$$
gegeben ist. Dann gilt (siehe Abbildung 19):
$$\begin{array}{rcl} \omega(N) & = & (3, 4), \\ \widetilde{N} & = & \text{conv}\big((0, 3), (3, 1), (7, 0)\big) + \mathbb{R}_+^2, \\ d(\widetilde{N}) & = & 3, \\ S(N) & = & \{1, 2\}, \\ I_1(N) & = & \{1\}, \\ N_1 & = & 27 + \mathbb{R}_+. \end{array}$$

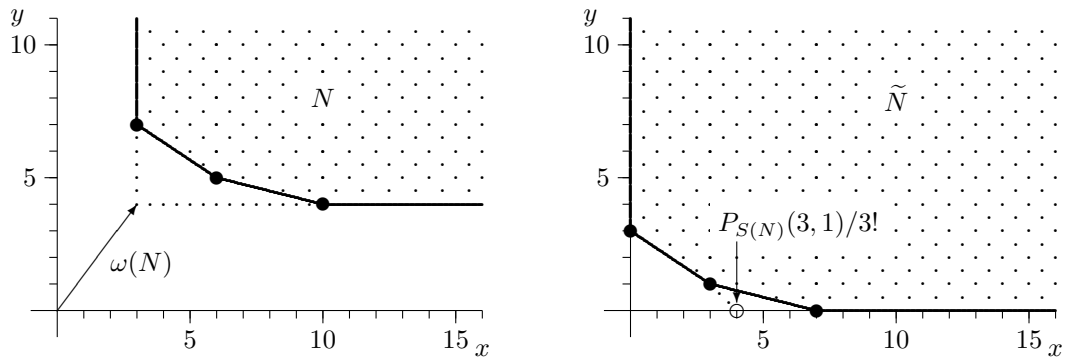


Abbildung 19 : Veranschaulichung der Notation von Spivakovsky.

Einem Polyeder N ordnet Spivakovsky das $2r+1$-Tupel

$$\delta(N) := \big(d(\widetilde{N}), \#I_1, d(\widetilde{N_1}), \ldots, \#I_r, d(\widetilde{N_r})\big)$$

zu und zeigt, dass nach einem Spielzug im leichten Polyederspiel für den neu erhaltenen Polyeder N' gilt:

$$\delta(N) <_{\text{lex}} \delta(N').$$

(Wichtig ist, dass $d(N') \leq d(N)$ ist.)

Bemerkung : Das leichte Polyederspiel wird von Spivakovsky in der ursprünglichen Version von Hironaka untersucht. Die hier vorgestellte Variante entspricht der von Herwig Hauser in [12] auf Seite 324 angegebenen Version. Oben wurde die Wahl der Spivakovsky-Strategie auf die hier verwendete Variante angepasst.

Die Spivakovsky-Strategie und die Vektor-Strategie weisen zwar Gemeinsamkeiten auf, unterscheiden sich aber doch wesentlich:

Gemeinsamkeiten:

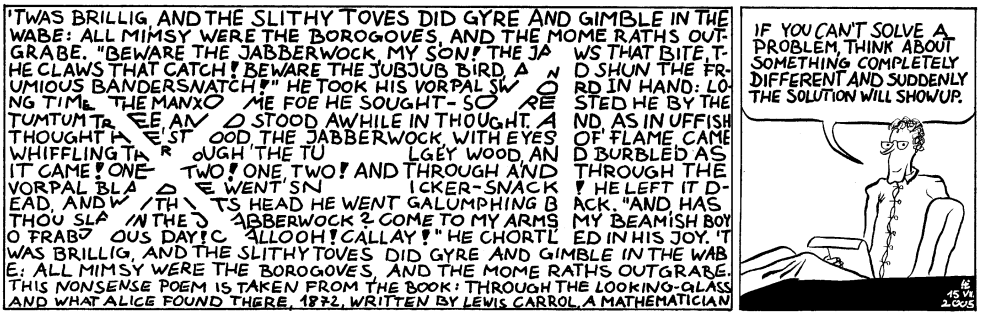
- Die beiden Strategien werden als Algorithmen beschrieben, die jeweils die Wahl J des Kaninchens angeben. Diese hängt dabei nur vom gegebenen Polyeder N ab und nicht von einer eventuellen Geschichte vorheriger Spielzüge.

- Die Strategien beschreiben nicht immer eine eindeutige Wahl von J. Stehen jedoch mehrere Möglichkeiten für die Wahl von J zur Auswahl, führt jede zum Sieg des Kaninchens.

Unterschiede:

- Die Spivakovsky-Strategie verwendet Induktion über die Dimension n, um zur Wahl J_S des Kaninchens zu gelangen. Die Vektor-Strategie kommt hingegen direkt zur Wahl von J_V, ohne Induktion zu verwenden. Daher ist die Vektor-Strategie auch einfacher anzugeben, und der Beweis ist anschaulicher.

- Die Wahl J_V der Vektor-Strategie ist immer zweielementig. Dies ist die kleinstmögliche Anzahl der Elemente von J, damit das Kaninchen gewinnen kann. Ist hingegen J_S die Wahl nach der Spivakovsky Strategie, so ist die Anzahl der Elemente von J_S möglichst groß. Ist zum Beispiel $S(N) = \{1, \ldots, n\}$ (das heißt, für jede Ecke a von N mit $\sum a_i = d(N)$ gibt es ein k mit $a_k \neq 0$), dann ist $J_S = \{1, \ldots, n\}$. Es wäre interessant zu untersuchen, mit welcher Strategie das Kaninchen schneller gewinnt.


'TWAS BRILLIG, AND THE SLITHY TOVES DID GYRE AND GIMBLE IN THE WABE: ALL MIMSY WERE THE BOROGOVES, AND THE MOME RATHS OUTGRABE. "BEWARE THE JABBERWOCK, MY SON! THE JAWS THAT BITE, THE CLAWS THAT CATCH! BEWARE THE JUBJUB BIRD, AND SHUN THE FRUMIOUS BANDERSNATCH!" HE TOOK HIS VORPAL SWORD IN HAND: LONG TIME THE MANXOME FOE HE SOUGHT-SOSTED HE BY THE TUMTUM TREE, AND STOOD AWHILE IN THOUGHT. AND, AS IN UFFISH THOUGHT HE STOOD THE JABBERWOCK, WITH EYES OF FLAME, CAME WHIFFLING THROUGH THE TULGEY WOOD, AND BURBLED AS IT CAME! ONE TWO! ONE, TWO! AND THROUGH AND THROUGH THE VORPAL BLADE WENT SNICKER-SNACK! HE LEFT IT DEAD, AND WITH ITS HEAD HE WENT GALUMPHING BACK. "AND, HAS THOU SLAIN THE JABBERWOCK? COME TO MY ARMS MY BEAMISH BOY O FRABOUS DAY! CALLOOH! CALLAY!" HE CHORTLED IN HIS JOY. 'T WAS BRILLIG, AND THE SLITHY TOVES DID GYRE AND GIMBLE IN THE WABE: ALL MIMSY WERE THE BOROGOVES, AND THE MOME RATHS OUTGRABE.
THIS NONSENSE POEM IS TAKEN FROM THE BOOK: THROUGH THE LOOKING-GLASS AND WHAT ALICE FOUND THERE, 1872, WRITTEN BY LEWIS CARROL, A MATHEMATICIAN
IF YOU CAN'T SOLVE A PROBLEM, THINK ABOUT SOMETHING COMPLETELY DIFFERENT AND SUDDENLY THE SOLUTION WILL SHOW UP.
15 VI 2005

Kapitel 3

Das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$

In diesem Kapitel wird das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ diskutiert. Der Unterschied zum leichten Polyederspiel liegt darin, dass der Spieler 2 noch zusätzliche Möglichkeiten erhält, eine gegebene Potenzreihe bzw. einen gegebenen Polyeder zu modifizieren (siehe 1.3). Die zusätzlichen Möglichkeiten sind so gewählt, dass das Spiel die Technik des Aufblasens modelliert.

Aufgrund von Beispielen werden die neu auftauchenden Phänomene untersucht. Schließlich werden „Höhe, Länge“ und „Steigung“ eines Polyeders definiert und mit deren Hilfe bewiesen, dass $J = \{1, 2\}$ für den ersten Spieler eine Gewinnstrategie ist.

3.1 Spieldefinition

Sei $\mathbb{F}$ ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper und $f(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$ eine formale Potenzreihe in $\mathbb{F}[[x, y]]$ mit fixen Koordinaten x und y. Zur Erinnerung die Spielregeln (siehe 1.3) für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$:

Zwei Spieler, das Kaninchen und der Hutmacher, machen folgende Züge:

1. Das Kaninchen spielt $J = \{1, 2\}$.
2. Der Hutmacher wählt unter Berücksichtigung von f ein $j \in J$ und ein $t \in \mathbb{F}$. Dann ersetzt er f durch
$$f'(x, y) := f(x, x(y + t)) \text{ für } j = 1,$$
bzw.
$$f'(x, y) := f(y(x + t), y) \text{ für } j = 2.$$

Anschließend wiederholen die beiden Spieler ihre Züge. Sei $(f^i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge der resultierenden Potenzreihen, also $f^0 := f, f^1 := f', f^2 := f''$, etc. Das Kaninchen gewinnt, wenn nach endlich vielen Zügen, etwa m, die Potenzreihe f^m bis auf einen Koordinatenwechsel eine monomiale Potenzreihe ist, das heißt, es gibt ein $\psi \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{F}[[x, y]]\right)$ mit

$$g := \psi(f^m) \text{ und } g(x, y) = x^k y^l q(x, y) \text{ mit } q \in \mathbb{F}[[x, y]], q(0, 0) \neq 0.$$

Problem: Zeige, dass das Kaninchen immer gewinnt.

Bemerkung: Beachte, dass das Kaninchen in Dimension 2 immer $J = \{1, 2\}$ spielt und daher keine Wahlmöglichkeit besitzt. Zwar wären auch die Spielzüge $J = \{1\}$ und $J = \{2\}$ zulässig, doch dies sind für das Kaninchen keine sinnvollen Spielzüge, da dann $f' = f$ gelten würde.

3.2 Mögliche Probleme beim schweren Polyederspiel

In diesem Abschnitt werden einige Phänomene vorgestellt, die beim schweren Polyederspiel auftreten. Wir stellen folgende vier Fragen:

- Wie verhalten sich monomiale Polyeder im schweren Polyederspiel?
- Gibt es Potenzreihen, für die das Spiel unendlich lange laufen könnte?
- Wie verhält sich die Anzahl der Ecken eines Newton Polyeders im schweren Polyederspiel?
- Können wir zur Lösung wieder das Vektorspiel (siehe Kapitel 2) verwenden?

3.2.1 Verhalten monomialer Polyeder

Beispiel 4 : Sei $f(x,y) = x^2y^3 \in \mathbb{F}[x,y]$ ein monomiales Polynom. Bei einem Spielzug mit $j = 1$ und $t \neq 0$ erhalten wir (siehe Abbildung 20):

$$\begin{aligned} f'(x,y) &:= f(x, x(y+t)) \\ &= x^5(y^3 + 3ty^2 + 3t^2y + t^3). \end{aligned}$$

Beachte, dass f', im Gegensatz zu f, aus einer Summe von Monomen besteht. Trotzdem ist f' wieder ein monomiales Polynom.

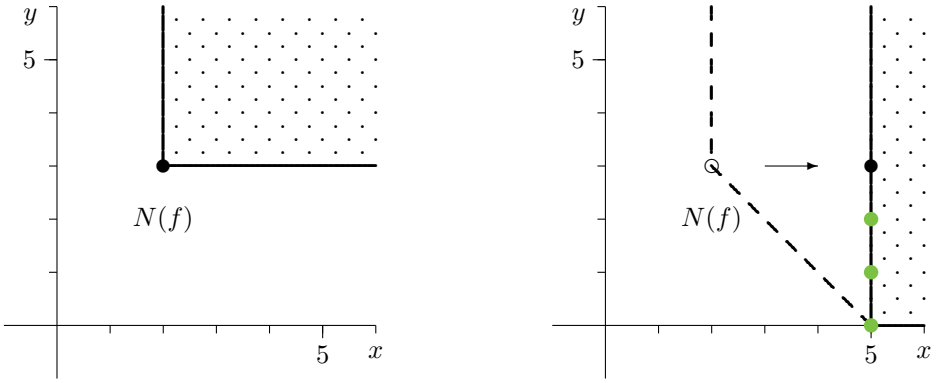


Abbildung 20 : Sowohl $N(f)$ als auch $N(f')$ sind monomial.

Frage: Bleibt auch ein allgemeiner monomialer Polyeder nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel monomial?

3.2.2 Unendliche Spiele

Im folgenden Beispiel wird ein Spiel vorgestellt, das unendlich lange dauert.

Beispiel 5 : Sei $f(x,y) = y^2 + x^2 + x^2y^2 \in \mathbb{F}_2[x,y]$. (Beachte, dass wir den endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ mit Charakteristik 2 verwenden.) Durch den Spielzug mit $j = 1$ und $t = 1$ erhalten wir (siehe Abbildung 21):

$$f'(x,y) = x^2y^2 + x^4 + x^4y^2.$$

Beachte, dass zwar eine Ecke (nämlich $(2,0)$) verloren geht, eine andere aber (nämlich $(4,0)$) dafür erzeugt wird.

Wie man in Abbildung 21 erkennt, entspricht der Newton Polyeder $N(f')$ bis auf eine Verschiebung entlang der x-Achse genau dem Newton Polyeder $N(f)$. Qualitativ hat sich also nichts verändert. Ein weiterer Spielzug mit $j = 1$ und $t = 1$ liefert nur eine weitere Verschiebung des Newton Polyeders. Es scheint, als könnte das Kaninchen in endlich vielen Schritten keinen monomialen Polyeder „erspielen“. Ist daher das schwere Polyederspiel für das Kaninchen im Allgemeinen nicht zu gewinnen?

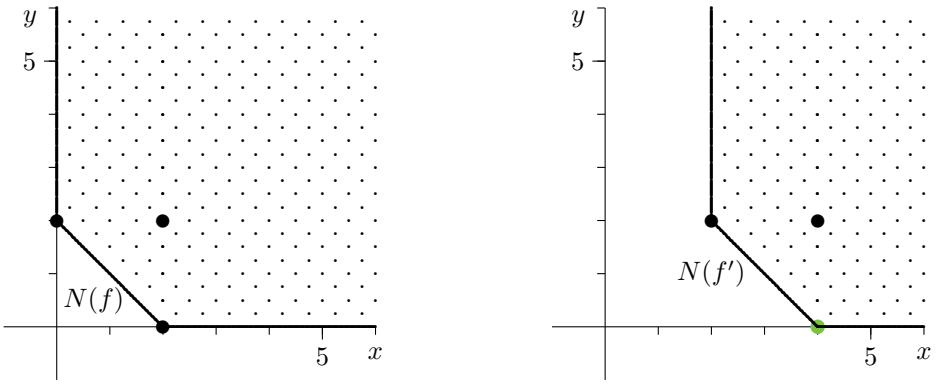


Abbildung 21 : $N(f)$ und $N(f')$ stimmen bis auf eine Verschiebung überein.

3.2.3 Anzahl der Ecken beim schweren Polyederspiel

Das folgende Beispiel untersucht das Verhalten der Anzahl der Ecken eines Polyeders nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel. Dabei spielt auch die Charakteristik des zugrunde liegenden Körpers eine Rolle:

Beispiel 6 : Sei $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^2y - x^3 + x^5 \in \mathbb{F}[x,y]$, mit $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Wie Abbildung 22 zeigt, besitzt $N(f)$ genau zwei Ecken. Im einfachen Polyederspiel kann die Anzahl der Ecken nicht steigen. Daher scheint dieses Spiel hier schon fast gewonnen. Im schweren Polyederspiel ist dies jedoch nicht der Fall: Denn beim Spielzug mit $j = 1$ und $t = 1$ erhalten wir:

$$f'(x,y) = x^2y^2 + x^3y + x^5.$$

Abbildung 22 zeigt, dass der zu f' gehörende Newton Polyeder nicht mehr zwei, sondern drei Ecken besitzt. Die Anzahl der Ecken hat also zugenommen und scheint nicht mehr dieselbe Rolle wie im einfachen Polyederspiel zu spielen!

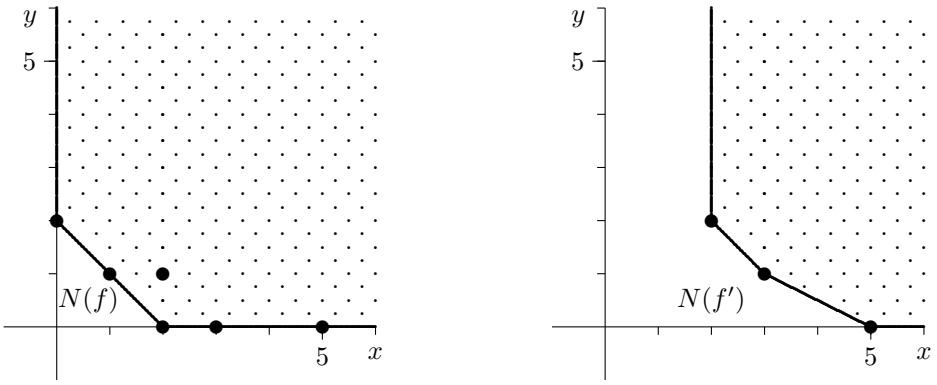


Abbildung 22 : $N(f)$ besitzt 2, aber $N(f')$ 3 Ecken.

3.2.4 Schweres Polyederspiel und Vektorspiel

Die Lösung des leichten Polyederspiels im Kapitel 2 verwendet wesentlich, dass die Anzahl der Ecken nicht steigen kann. Mehr noch, dass Ecken nur verschwinden, nicht aber auftauchen können. Beim vorherigen Beispiel mit

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^2y - x^3 + x^5$$

sind $(2,0)$ und $(0,2)$ die einzigen Ecken von $N(f)$ (siehe Abbildung 22). Wie gezeigt, besitzt $N(f')$ aber drei Ecken. Damit kann der Beweis für den Sieg des Kaninchens nicht vom einfachen Polyederspiel übernommen werden.

3.3 Monomiale Polyeder im schweren Polyederspiel

Dieser Abschnitt zeigt, dass monomiale Polyeder nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ wieder monomial sind (vergleiche mit Beispiel 4). Weiters werden Potenzreihen untersucht, die bis auf einen Koordinatenwechsel monomial sind.

Hilfssatz 7 : *Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine monomiale Potenzreihe. Dann ist auch f', die Potenzreihe nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel, wieder monomial. (Vergleiche dazu auch Beispiel 4 und Abbildung 20.)*

Beweis. Da f eine monomiale Potenzreihe ist, gibt es ein $g \in \mathbb{F}[[x,y]]$ mit $g(0,0) \neq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{N}^2$, so dass

$$f(x,y) = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \cdot g(x,y)$$

ist. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Spielzug gegeben durch $j = 1$ und $t \neq 0$ (für $t = 0$ ist die Behauptung klar). Damit gilt:

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= f(x, xy + tx) \\ &= x^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{k} y^{\alpha_2 - k} t^k \right) \cdot g(x, xy + tx) \\ &= x^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \widetilde{g}(x,y). \end{aligned}$$

Beachte, dass für

$$\widetilde{g}(x,y) := \left(\sum_{k=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{k} y^{\alpha_2 - k} t^k \right) \cdot g(x, xy + tx)$$

ebenfalls $\widetilde{g}(0,0) \neq 0$ gilt. ☺

Monomiale Potenzreihen bleiben also auch im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ monomial.

Weiters gibt es nichtmonomiale Potenzreihen, die durch Koordinatenwechsel monomial werden. Im Beispiel 5 ergab sich aus dem Polynom

$$f(x,y) = y^2 + x^2 + x^2 y^2 \in \mathbb{F}_2[x,y]$$

nach dem Spielzug mit $j = 2$ und $t = 1$, das Polynom

$$f'(x,y) = x^2 y^2 + x^4 + x^4 y^2.$$

Damit entspricht der Newton Polyeder $N(f')$ bis auf eine Verschiebung entlang der x-Achse genau dem Newton Polyeder $N(f)$ (siehe Abbildung 21). Der sich daraus ergebende unendliche Spielverlauf kann jedoch verhindert werden.

Betrachte dazu vorerst den durch

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x \\ y &\longrightarrow y + x \end{aligned}$$

gegebenen Koordinatenwechsel φ. Auf f angewandt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi\big(f(x,y)\big) &= f(x, y + x) \\ &= y^2 + x^2 y^2 + x^4. \end{aligned}$$

Die Ecke $(0,2)$ „löscht“ sozusagen die Ecke $(2,0)$ aus. Dafür wird vom Punkt $(2,2)$ eine neue Ecke bei $(4,0)$ erzeugt (siehe Abbildung 23). Nun können wir in derselben Weise fortfahren und die untere der zwei Ecken von $\varphi(f)$ mit einem neuerlichen Koordinatenwechsel löschen. Dabei entsteht weiter hinten wieder eine neue Ecke, die wir neuerlich löschen können usw. Die Kante zwischen den Ecken wird immer flacher.

Da wir als Grundkörper $\mathbb{F}_2$ mit Charakteristik 2 angenommen haben, liefert der durch

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x \\ y &\longrightarrow y + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \end{aligned}$$

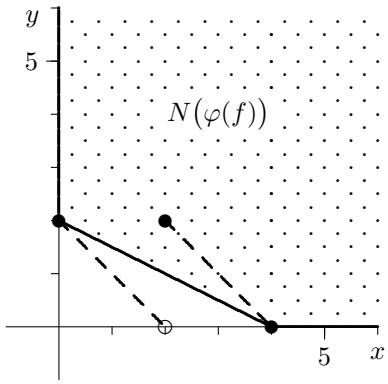


Abbildung 23 : $N\big(\varphi(f)\big)$ besitzt eine flachere Kante, als $N(f)$.

gegebene Koordinatenwechsel ψ schließlich einen monomialen Polyeder (siehe Abbildung 24):

$$\begin{aligned}
\psi\big(f(x,y)\big) &= \left(y+\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)^2 + x^2 + x^2\cdot\left(y+\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)^2 \\
&= y^2+\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k} + x^2 + x^2y^2 + x^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k} \\
&= y^2+x^2y^2+\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k} + \left(x^2+\sum_{k=1}^{\infty}x^{2(k+1)}\right) \\
&= y^2+x^2y^2+\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}x^{2(k+1)}\right) \\
&= y^2+x^2y^2.
\end{aligned}$$

Diese Beobachtung gilt allgemein für die Newton Polyeder spezieller Potenzreihen, wie der

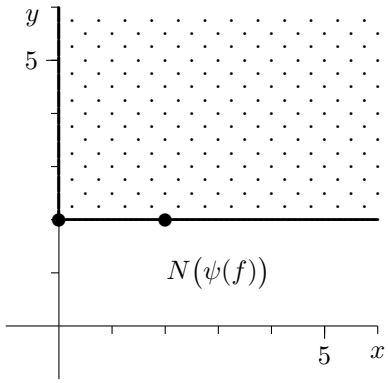


Abbildung 24 : $N\big(\psi(f)\big)$ ist monomial.

nächste Hilfssatz zeigt.

***Hilfssatz* 8 :** *Seien $m\in\mathbb{N}$ und $F\in\mathbb{F}\,[[x,y]]$ eine formale Potenzreihe mit $F(0,0)\neq 0$. Ist*

$$f(x,y) := x^m y\cdot F(x,y) + c_s x^s + \sum_{k=s+1}^{\infty} c_k x^k,$$

mit $s\geq m+1, c_s\neq 0, c_k\in\mathbb{F}$. Dann gibt es einen Koordinatenwechsel ψ so, dass $\psi(f)$ monomial ist.

Beweis. Betrachte den durch

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x \\ y &\longrightarrow y - c_s x^{s-m} \end{aligned}$$

gegebenen Koordinatenwechsel ψ_0. Es gilt:

$$\begin{aligned} \psi_0\big(f(x,y)\big) &= x^m(y - c_s x^{s-m}) \cdot G(x, y - c_s x^{s-m}) + c_s x^s + \sum_{k=s+1}^{\infty} c_k x^k, \\ &= x^m y \cdot F(x, y - c_s x^{s-m}) + \sum_{k=s+1}^{\infty} c_k x^k. \end{aligned}$$

Es gibt also ein $s_1 \geq s+1$ mit $c_{s_1} \neq 0$ (sonst sind wir schon fertig) so, dass gilt:

$$f_1(x,y) := \psi_0\big(f(x,y)\big) = x^m y \cdot F_1(x,y) + c_{s_1} x^{s_1} + \sum_{k=s_1+1}^{\infty} c_k x^k,$$

mit $F_1(x,y) := F(x, y - c_s x^{s-m}), F_1(0,0) \neq 0$. Setzen wir also

$$f_0 := f$$

und

$$f_{n+1}(x,y) := \psi_n(f) := f\big(x, y - \sum_{k=0}^{n} c_{s_k} x^{s_k}\big),$$

mit $F_0 := F, s_0 := s$, so erhalten wir durch Wiederholung der obigen Überlegungen eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Koordinatenwechseln, die in der $\mathfrak{q}$-adische Topologie gegen den Koordinatenwechsel ψ, gegeben durch

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x, \\ y &\longrightarrow y - \sum_{k=0}^{\infty} c_{s_k} x^{s_k}, \end{aligned}$$

konvergiert. Für diesen gilt nach Konstruktion:

$$\psi(f) = x^m y \cdot G(x,y),$$

mit $G(0,0) \neq 0$, also ist $\psi(f)$ monomial. ☺

Damit sind zwei Fragen aus dem Abschnitt 3.2 behandelt: Monomiale Polyeder bleiben auch im schweren Polyederspiel monomial und manche Polyeder, die zu unendlichen Spielfolgen führen, sind schon bis auf einen Koordinatenwechsel monomial. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der noch verbleibenden Frage nach dem Verhalten der Anzahl der Ecken im schweren Polyederspiel.

3.4 Anzahl der Ecken beim schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$

Auch im schweren Polyederspiel geht es darum, die Anzahl der Ecken eines Polyeders auf Eins zu senken. Folgendes Beispiel zeigt, dass das (bei unachtsamer Spielweise des Hutmachers) sehr schnell passieren kann.

Beispiel: Sei $f \in \mathbb{F}[x,y]$ gegeben durch:

$$f(x,y) = xy^5 + x^2y^3 + x^4y^2.$$

Spielt der Hutmacher unachtsamerweise zum Beispiel $j = 1$ und $t = 1$, dann ergibt sich ein monomiales Polynom (siehe Abbildung 25):

$$f'(x,y) = x^5 \cdot (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + x^6 \cdot (y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 11y^2 + 7y + 2).$$

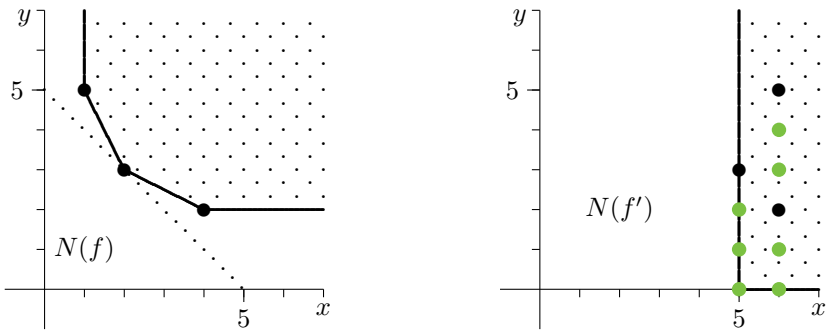


Abbildung 25 : Da der Hutmacher unachtsam war, ist $N(f')$ bereits monomial.

Die wichtige Beobachtung an diesem Beispiel ist, dass die Initialform des Polynoms f ein Monom ist. Es gibt also nur einen Term im Polynom, dessen Grad gleich der Ordnung des Polynoms ist. Ist die Initialform einer beliebigen Potenzreihe f ein Monom, so ist $N(f')$ monomial, falls der Hutmacher $t \neq 0$ wählt. Dies zeigt der folgende Hilfssatz.

***Hilfssatz* 9 :** *Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine formale Potenzreihe. Wir schreiben f in der Form*

$$f = \sum_{k=d}^{\infty} F_k,$$

wobei F_k homogene Polynome mit $\operatorname{grad}(F_k) = k$ sind. Sei weiters $F_d \neq 0$. Damit ist $d = \operatorname{ord}(f)$ und F_d die Initialform von f. Ist F_d ein Monom, also $f(x,y) = x^m y^n + \sum_{k=d+1}^{\infty} F_k$ für $m,n \in \mathbb{N}, m+n=d$, und spielt der Hutmacher $j=1$ und $t \neq 0$, so ist

$$f'(x,y) = f(x, xy + tx)$$

eine monomiale Potenzreihe (siehe Abbildung 25).

Beweis. Da $t \neq 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= f(x, xy+tx) \\ &= x^{m+n}y^n + \ldots + t^n x^{m+n} + \sum_{k=d+1}^{\infty} F_k(x, yx+tx) \\ &= x^{m+n}(t^n + t^{n-1}y + \ldots + ty^{n-1} + y^n) + \sum_{k=d+1}^{\infty} F_k(x, yx+tx). \end{aligned}$$

Dies ist eine monomiale Potenzreihe. Der zugehörige Newton Polyeder $N(f')$ wird von der Ecke $(m+n, 0)$ erzeugt. ☺

Der letzte Hilfssatz legt nahe, formale Potenzreihen zu untersuchen, deren Initialform kein Monom ist. Dazu betrachten wir zuerst homogene Polynome unter speziellen linearen Koordinatenwechseln. Diese Überlegungen liefern dann den Schlüssel zur Lösung des schweren Polyederspiels in $\mathbb{N}^2$.

3.4.1 Homogene Polynome unter speziellen linearen Koordinatenwechseln

Der folgende Hilfssatz fasst die Hauptergebnisse dieses Abschnittes zusammen:

***Hilfssatz* 10 :** *Seien $a,m,n \in \mathbb{N}, a \leq n$ und $f(x,y) \in \mathbb{F}[x,y]$ ein homogenes Polynom der Form*

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i},$$

mit $c_i \in \mathbb{F}, c_0 \neq 0 \neq c_a$. Sei weiters für $t \in \mathbb{F}, t \neq 0$

$$g(x,y) := f(x, y+tx),$$

dann gilt:

1. *Für das Polynom g ist die Ordnung bezüglich y kleiner oder gleich a, also:*

   $$\mathrm{ord}_y(g) \leq a.$$

   Schreiben wir also

   $$g(x,y) = \sum_{i=0}^{n} k_i x^{m+n-i} y^i,$$

   dann gibt es ein $0 \leq l \leq a$ mit $k_l \neq 0$.

2. *Es ist genau dann*

   $$\mathrm{ord}_y(g) = a,$$

   also

   $$g(x,y) = \sum_{i=a}^{m} k_i x^{m+n-i} y^i \text{ mit } k_a \neq 0,$$

   wenn gilt:

   $$c_i t^{-i} = \binom{a}{i} \cdot (-1)^i \text{ für } i = 0, \ldots, a.$$

   Das heißt, es gibt ein $c \in \mathbb{F}$ so, dass gilt:

   $$g(x,y) = c x^m y^{n-a} \cdot (y - tx)^a.$$

Beweis. Zum Punkt 1: Es gilt:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} (y+tx)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} y^{n-i-j} t^j x^j \\ &= \sum_{i=0}^{a} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} c_i y^{n-i-j} t^j x^{m+i+j}. \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen können wir g als homogenes Polynom wie folgt schreiben:

$$g(x,y) = \sum_{i=0}^{n} k_i x^{m+n-i} y^i.$$

Die Behauptung des Hilfssatzes ist gezeigt, wenn einer der Koeffizienten $k_0, \ldots, k_a$ ungleich Null ist. Für diese Koeffizienten ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} k_0 &= c_0 \binom{n}{n} t^n + c_1 \binom{n-1}{n-1} t^{n-1} + \ldots + c_{a-1} \binom{n-a+1}{n-a+1} t^{n-a+1} + c_a \binom{n-a}{n-a} t^{n-a}, \\ k_1 &= c_0 \binom{n}{n-1} t^{n-1} + \ldots + c_a \binom{n-a}{n-a-1} t^{n-a-1}, \\ &\vdots \\ k_a &= c_0 \binom{n}{n-a} t^{n-a} + \ldots + c_a \binom{n-a}{n-2a} t^{n-2a}. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist gezeigt, wenn folgende Ungleichung gilt:

$$B \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 t^{-1} \\ \vdots \\ c_a t^{-a} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \binom{n}{a} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 t^{-1} \\ \vdots \\ c_a t^{-a} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Ungleichung gilt, da die Determinante von B nach dem folgenden Hilfssatz 11 ungleich 0 ist.

Zum Punkt 2: Da $\det(B) = \pm 1$ ist nach Hilfssatz 11, hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \binom{n}{a} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 t^{-1} \\ \vdots \\ c_a t^{-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung. Daher genügt es zu zeigen, dass

$$g(x,y) = cx^m y^{n-a} \cdot (y - tx)^a$$

eine Lösung ist. Dafür betrachten wir den linearen Koordinatenwechsel φ gegeben durch

$$(x,y) \longrightarrow (x, y + tx),$$

mit $t \neq 0$. Für diesen gilt:

$$g'(x,y) = g(x, y+tx) = cx^m(y+tx)^{n-a}(y+tx-tx)^a = c(t^{n-a}x^{m+n-a}y^a + h(x,y))$$

mit $\mathrm{ord}_y(h) \geq a+1$. Daher ist $\mathrm{ord}_y(g') = a$ und die Behauptung folgt.

(Alternativ lässt sich die Behauptung auch aus der Inversen der Matrix B, siehe Hilfssatz 12, ableiten.) ☺

Definition: Für $a, n \in \mathbb{N}, a \leq n$ nennen wir die Matrix $B_{n,a} = (b_{ij})$ definiert durch $b_{ij} := \binom{n-i}{j}$ für $0 \leq i, j \leq a$ die Binomialmatrix bezüglich n und a. Es ist also:

$$B_{n,a} = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \binom{n}{a} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{a} \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden beschäftigen wir uns näher mit der Binomialmatrix. Die Ergebnisse fließen dann in den Beweis des obigen Hilfssatzes ein.

***Hilfssatz* 11:** *Sei $B_{n,a}$ die Binomialmatrix bezüglich n und a. Dann gilt:*

$$\det(B_{n,a}) = \pm 1.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung mit Induktion über a. Für $a = 0$ ist die Behauptung klar. Für $a > 1$ wenden wir zuerst einige elementare Spaltenumformungen auf die Matrix an. Subtrahieren wir die vorletzte von der letzten Spalte, so erhalten wir mit der Binomialidentität $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n-a+1}{0} & \binom{n-a}{0} - \binom{n-a+1}{0} \\ \binom{n}{1} & & \binom{n-a+1}{1} & \binom{n-a}{1} - \binom{n-a+1}{1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \binom{n}{a-1} & & \binom{n-a+1}{a-1} & \binom{n-a}{a-1} - \binom{n-a+1}{a-1} \\ \binom{n}{a} & \cdots & \binom{n-a+1}{a} & \binom{n-a}{a} - \binom{n-a+1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n-a+1}{0} & 0 \\ \binom{n}{1} & & \binom{n-a+1}{1} & -\binom{n-a+1}{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \binom{n}{a-1} & & \binom{n-a+1}{a+1} & -\binom{n-a+1}{a-2} \\ \binom{n}{a} & \cdots & \binom{n-a+1}{a} & -\binom{n-a+1}{a-1} \end{pmatrix}.$$

Ebenso subtrahieren wir die Spalte $i-1$ von der Spalte i für $i = a, a-1, \ldots, 1$ und erhalten

$$B' := \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \binom{n}{1} & -\binom{n}{0} & \cdots & -\binom{n-a+2}{0} & -\binom{n-a+1}{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \binom{n}{a} & -\binom{n}{a-1} & \cdots & -\binom{n-a+2}{a-1} & -\binom{n-a+1}{a-1} \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir mit $S_{1,i}$ jene Matrix, die aus B' durch Streichen der ersten Zeile und der i-ten Spalte entsteht, dann gilt:

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(B') \\ &= \sum_{i=1}^{a+1}(-1)^{i+1}B'_{1,i}\det(S_{1,i}) \\ &= B'_{1,1}\cdot\det(S_{1,1}) \\ &= 1\cdot\det(-B_{n,a-1}).\end{aligned}$$

Da nach Induktionsannahme $\det(B_{n,a-1}) = \pm 1$ ist, folgt die Behauptung. ☺

Nun zur Berechnung der Inversen der Binomialmatrix:

Hilfssatz 12 : *Seien $a, n \in \mathbb{N}, a \leq n$ und $B_{n,a}$ die Binomialmatrix bezüglich n und a. Dann ist die Inverse der Binomialmatrix gegeben durch:*

$$B_{n,a}{}^{-1} = D_{n,a}\cdot C_{n,a}.$$

Dabei sind $D_{n,a}$ und $C_{n,a}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}(D_{n,a})_{i,j} &:= (-1)^i\cdot\binom{j}{i} \text{ für } 0\leq i,j\leq a, \\ (C_{n,a})_{i,j} &:= (-1)^{i-j}\cdot\binom{n-j}{i-j} \text{ für } 0\leq i,j\leq a.\end{aligned}$$

(Beachte, dass $D_{n,a}$ eine obere bzw. $C_{n,a}$ eine untere Dreiecksmatrix ist, da $\binom{i}{j} = 0$ ist, für $i < j$.)

Beweis. Um den Hilfssatz zu beweisen, gehen wir wie folgt vor: Wir formen die Matrix $B_{n,a}$ durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in die Einheitsmatrix um. Die Matrix $D_{n,a}$ bzw. $C_{n,a}$ entsteht durch Anwendung der analogen Spaltenumformungen bzw. Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix.

Beginnen wir mit den Spaltenumformungen: Für $i = a+1,\ldots,2$ ziehen wir von der i-ten Spalte die $(i-1)$-te Spalte ab und multiplizieren dann die i-te Spalte mit -1. Diese Spaltenumformungen, auf $B_{n,a}$ angewendet, liefern die Matrix:

$$\begin{pmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n-a+2}{0} & \binom{n-a+1}{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{a} & \binom{n}{a-1} & \cdots & \binom{n-a+2}{a-1} & \binom{n-a+1}{a-1} \end{pmatrix}.$$

Auf die Einheitsmatrix angewendet erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $j = 3,\ldots,a+1$ ziehe nun für $i = a+1,\ldots,j$ von der i-ten Spalte die $(i-1)$-te Spalte ab und multipliziere dann die i-te Spalte mit -1. Dann ergibt sich $D_{n,a}$ – wie behauptet – und aus $B_{n,a}$ erhalten wir

$$B'_{n,a} := \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \binom{n}{1} & \binom{n-1}{0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \binom{n}{2} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-2}{0} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{a-1} & \binom{n-1}{a-2} & \binom{n-2}{a-3} & \cdots & \binom{n-a+1}{0} & 0 \\ \binom{n}{a} & \binom{n-1}{a-1} & \binom{n-2}{a-2} & \cdots & \binom{n-a+1}{1} & \binom{n-a}{0} \end{pmatrix}.$$

Nun wenden wir auf die Matrix $B'_{n,a}$ folgende Zeilenumformungen an: Für $j = 1, \ldots, a$ addiere zur i-ten Zeile für $i = j+1, \ldots, a+1$ das $\binom{n-j+1}{i-1}$-fache der j-ten Zeile. Wir erhalten die Einheitsmatrix. Wenden wir dieselben Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix an, erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} b(n,0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b(n,1) & b(n-1,0) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b(n,a) & b(n-1,a-1) & \cdots & b(n-a+1,1) & b(n-a,0) \end{pmatrix}.$$

Dabei definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ induktiv $b(n,0) := 1$ und für $m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n$:

$$b(n,m) := -\sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-i}{m-i} \cdot b(n,i).$$

Dass diese Matrix gleich $C_{n,a}$ ist, folgt aus der Gleichheit

$$b(n,m) = (-1)^m \cdot \binom{n}{m},$$

die wir im nächsten Hilfssatz beweisen. ☺

Hilfssatz: *Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren induktiv $b(n,0) := 1$ und für $m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n$:*

$$b(n,m) := -\sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-i}{m-i} \cdot b(n,i).$$

Dann gilt die Gleichheit:

$$b(n,m) = (-1)^m \cdot \binom{n}{m}.$$

Beweis. Vollständige Induktion über m liefert den Beweis: Für $m = 1$ gilt:

$$b_1 = -\sum_{i=0}^{0} \binom{n-i}{m-i} \cdot b_i = -\binom{n}{1} = -1^1 \cdot \binom{n}{1}.$$

Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsannahme gilt:

$$b(n,m) = -\sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-i}{m-i} \cdot b(n,i) = -\sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-i}{m-i} \cdot \binom{n}{i} (-1)^i.$$

Daher folgt die Behauptung, wenn folgende Gleichung gilt:

$$0 = -\sum_{i=0}^{m} \binom{n-i}{m-i} \cdot \binom{n}{i} (-1)^i.$$

Diese Gleichung zeigen wir im Folgenden. Dazu verwenden wir die Gleichungen

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha}{\alpha-\beta}$$

und

$$\sum_k \binom{\alpha}{\beta+k} \binom{\gamma+k}{\delta} (-1)^k = (-1)^{\alpha+\beta} \cdot \binom{\gamma-\beta}{\delta-\alpha}$$

(siehe dazu Gleichung 5.24 in [10]). Es gilt:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=0}^{m} \binom{n-i}{m-i} \cdot \binom{n}{i} (-1)^i &= -\sum_{i=0}^{m} \binom{n-i}{n-i-(m-i)} \cdot \binom{n}{i} (-1)^i \\ &= -\sum_{i=0}^{m} \binom{n-i}{n-m} \cdot \binom{n}{i} (-1)^i. \end{aligned}$$

Setze nun $k := m - i$ und erhalte:

$$-\sum_{i=0}^{m} \binom{n-i}{m-i} \cdot \binom{n}{i} (-1)^i = -\sum_{k=0}^{m} \binom{n-m+k}{n-m} \cdot \binom{n}{n-m+k} (-1)^{m-k}.$$

Beachte, dass $(-1)^{m-k}$ gleich $(-1)^k$ ist, falls m gerade ist, sonst gleich $(-1)(-1)^k$. Unter Verwendung der oben angegebenen Gleichung mit $\gamma = n - m = \delta = \beta$ und $n = \alpha$ erhalten wir:

$$-\sum_{i=0}^{m} \binom{n-i}{m-i} \cdot \binom{n}{i} (-1)^i = \pm(-1)^{n+n-m} \cdot \binom{n-m-(n-m)}{n-m-n} = \pm(-1)^{2n-m} \cdot \binom{0}{-m} = 0.$$

☺

3.4.2 Höhe, Länge und Steigung

Ein Newton Polygon, also ein Newton Polyeder in $\mathbb{R}^2_+$, ähnelt einem von der Seite betrachtetem Schiffsrumpf. Im Folgenden werden daher die Begriffe Galions-, Bug- und Kielpunkt eingeführt. Diese führen zu den Begriffen Höhe, Länge und Steigung, mit deren Hilfe wir im Abschnitt 3.6 beweisen, dass $J = \{1, 2\}$ eine Gewinnstrategie des Kaninchens ist.

Definition: Sei f eine formale Potenzreihe in 2 Variablen, $A := \mathrm{Tr}(f) \subseteq \mathbb{N}^2$ und $N := N(A) = N(f)$ der von A bzw. f erzeugte Newton Polyeder. Sei weiters E die Menge der Ecken von N. (Zur Veranschaulichung der Definitionen siehe das folgende Beispiel, sowie Abbildung 26.)

1. Der Bugpunkt $\gamma(N) = \gamma(A) = \gamma(f) = (\gamma_1, \gamma_2)$ (bezüglich y) sei jene Ecke von N mit der kleinsten ersten Komponente (und damit größten zweiten).

2. Der Kielpunkt $\kappa(N) = \kappa(A) = \kappa(f) = (\kappa_1, \kappa_2)$ (bezüglich y) sei jene Ecke von N mit der kleinsten zweiten Komponente (und damit größten ersten).

3. Der Bugpunkt $\beta(N) = \beta(A) = \beta(f) = (\beta_1, \beta_2)$ (bezüglich y) sei jene Ecke von N (ungleich γ), die dem Galionspunkt γ am nächsten ist, das heißt, für die $b_1 - \gamma_1$ minimal ist.

4. Seien $\gamma(N), \kappa(N)$ Galions- bzw. Kielpunkt (bezüglich y). Wir definieren die Höhe $\mathsf{H}(N) = \mathsf{H}(A) = \mathsf{H}(f)$ von N bzw. A bzw. f (bezüglich y) wie folgt:

   $$\mathsf{H}(N) := \mathsf{H}(A) := \mathsf{H}(f) := \gamma_2 - \kappa_2.$$

   Beachte, dass die Höhe eine obere Schranke für die Anzahl der Ecken von N ist.

5. Sei γ der Galionspunkt von N und β der Bugpunkt. Mit Galionskante k bezeichnen wir jene Kante von N bzw. f, die zwischen γ und β liegt (also die erste Kante).

6. Seien $\gamma(N), \kappa(N)$ Galions- bzw. Kielpunkt (bezüglich y). Die Steigung $\mathsf{Stg}(N) = \mathsf{Stg}(A) = \mathsf{Stg}(f)$ von N bzw. A bzw. f (bezüglich y) ist definiert durch:

   $$\mathsf{Stg}(N) := \mathsf{Stg}(A) := \mathsf{Stg}(f) := \gamma_1 - \kappa_1.$$

7. Die Länge $\mathsf{L} := \mathsf{L}(N) = \mathsf{L}(A) = \mathsf{L}(f)$ von N bzw. A bzw. f (bezüglich y) ist definiert durch:

   $$\mathsf{L} := \gamma_2 - \beta_2.$$

Bemerkung: Die obigen Definitionen lassen sich analog bezüglich x definieren (tausche den Index 1 gegen 2 und umgekehrt). Im Folgenden wird nur mehr von Galions-, Bug-, Kielpunkt, Höhe, Länge und Steigung die Rede sein. Falls nicht explizit angegeben, sind dies die Begriffe bezüglich y.

Zur Erläuterung der obigen Definitionen ein Beispiel.

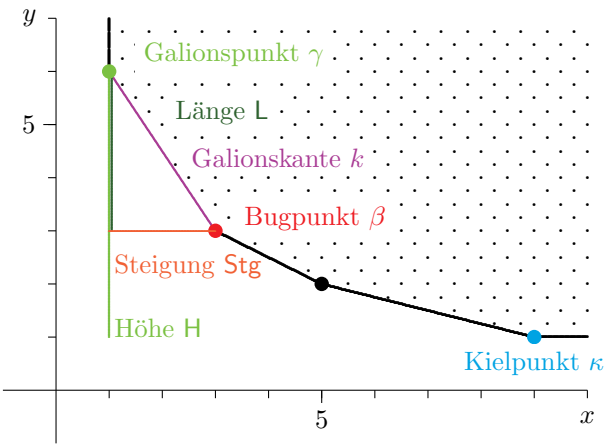


Abbildung 26 : Höhe, Steigung, Galions-, Bug-, Kielpunkt, Steigung und Länge eines Polyeders.

Beispiel : Sei $f(x,y) = xy^6 + x^3y^3 + x^5y^2 + x^9y$. Für den Polyeder $N(f)$ gilt (siehe auch Abbildung 26):

$$\begin{aligned} \gamma(f) &= (1,6), \\ \kappa(f) &= (9,1), \\ \mathsf{H}(f) &= \min\{9-1, 6-1\} = 5, \\ \beta(f) &= (3,3), \\ \mathsf{Stg}(f) &= 2, \\ \mathsf{L}(f) &= 3. \end{aligned}$$

Die Höhe ist ein nützliches Maß eines Polyeders, da sie nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel nicht steigen kann:

***Folgerung* 13 :** *Sei $\mathbb{F}$ ein beliebiger Körper und $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine formale Potenzreihe mit Höhe $\mathsf{H}(f) = a$. Sei weiters $\operatorname{ord}(f) = d$ und f_d die Initialform von f. Dann gilt für einen Spielzug mit $j = 1, t \neq 0$ und $f'(x,y) = f(x, xy + tx)$ die Ungleichung:*

$$\mathsf{H}(f') \leq \mathsf{H}(f_d).$$

Insbesondere gilt damit:

$$\mathsf{H}(f') \leq a = \mathsf{H}(f).$$

Beweis. Es sei $\operatorname{ord}(f) = d$ und $f_d \neq 0$ die Initialform von f. Beachte, dass immer

$$\mathsf{H}(f) \geq \mathsf{H}(f_d)$$

ist (siehe Abbildung 27). Die zweite Behauptung folgt somit aus der ersten.

Wir zeigen die Ungleichung

$$\mathsf{H}\Big(f(x, xy + tx)\Big) \leq a = \mathsf{H}(f_d).$$

Wir schreiben f wie folgt:

$$f(x,y) := \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i} + F(x,y).$$

Dabei sind $a, m, n \in \mathbb{N}$, $m+n = d$, $a \leq n$ und $c_i \in \mathbb{F}$, $c_0 \neq 0 \neq c_a$. Weiters ist $F(x,y) \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine formale Potenzreihe mit $\operatorname{ord}(F) > d = \operatorname{ord}(f_d)$. Damit ist die Initialform von f gegeben durch

$$f_d(x,y) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i}$$

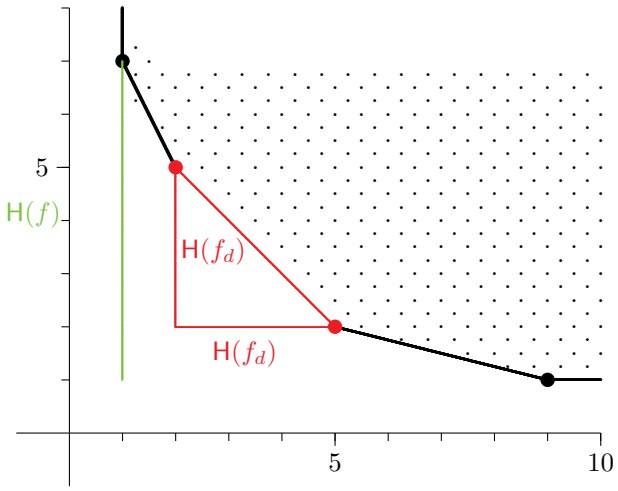


Abbildung 27 : Es ist immer $\mathsf{H}(f_d) \leq \mathsf{H}(f)$.

und es ist $\mathsf{H}(f_d) = a$. Da $t \neq 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= f(x, xy + tx) \\ &= \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i}(xy+tx)^{n-i} + F(x, xy+tx) \\ &= \sum_{i=0}^{n} c'_i x^{m+i}(xy)^{n-i} + F(x, xy+tx) \\ &= \sum_{i=0}^{n} c'_i x^{m+n} y^{n-i} + F(x, xy+tx) \\ &=: g(x,y) + G(x,y). \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 10 gibt es ein $l, 0 \leq l \leq a$ so, dass $c'_l \neq 0$ ist. Damit ist

$$f'(x,y) = x^d \cdot \sum_{i=l}^{n} c'_i y^{n-i} + G(x,y).$$

Beachte weiters, dass $\mathrm{ord}_x(G) \geq d+1$ ist. Damit folgt:

$$\mathsf{H}(f') \leq l \leq a = \mathsf{H}(f_d).$$

☺

Die Folgerung zeigt, dass die Höhe eines Newton Polyeders im Spiel mit Koordinatenwechseln nicht zunehmen kann. Im einfachen Polyederspiel hatte die Anzahl der Ecken diese Eigenschaft. Beachte, dass die Höhe eine obere Grenze für die Anzahl der Ecken eines Polyeders ist. Es besteht somit die Hoffnung, dass die Höhe im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ das leistet, was die Anzahl der Ecken im einfachen Polyederspiel geleistet hat. Um diese Hoffnung noch weiter zu bestärken, führen wir im Folgenden einen Beweis an, der mit Hilfe von Höhe, Steigung und Länge den Sieg des Kaninchens im einfachen Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ zeigt.

3.5 Das leichte Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$, Beweisvariante

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass das Kaninchen das einfache Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$, bei Wahl der Menge $J = \{1, 2\}$, immer gewinnt. Der Beweis erfolgt – wie in Kapitel 2 – über eine „Bewertung“ der Polyeder.

Definition: Sei **K** eine Strategie des Kaninchens im leichten bzw. schweren Polyederspiel, das heißt, zu jedem Newton Polyeder N ist $\mathbf{K}(N) \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Wahl des Kaninchens. Weiters sei $\mathcal{NP}_n$ die Menge aller Newton Polyeder in $\mathbb{R}^n_+$, $NP \subseteq \mathcal{NP}_n$ und $(W, <)$ eine wohlgeordnete Menge (etwa $\mathbb{N}^m$ mit der lexikographischen Ordnung). Das kleinste Element in W sei mit 0 bezeichnet. Eine Abbildung

$$b : NP \longrightarrow W$$

heißt Bewertung für die Strategie **K** zur Menge NP, wenn sie folgende zwei Bedingungen für alle $N \in NP$ erfüllt:

1. Ist der Newton Polyeder N monomial, so ist $b(N) = 0$.
2. Sei andererseits der Newton Polyeder N nicht monomial und N' der Newton Polyeder nach einem Spielzug im leichten bzw. schweren Polyederspiel (mit der Strategie **K** des Kaninchens und einer beliebigen Strategie des Hutmachers). Sei weiters $N' \in NP$. Dann ist
$$b(N') < b(N).$$

***Hilfssatz* 14:** *Gibt es zu einer Strategie* **K** *des Kaninchens im leichten bzw. schweren Polyederspiel und zu einer Menge $NP \subseteq \mathcal{NP}_n$ eine Bewertung b, dann ist* **K** *eine Gewinnstrategie des Kaninchens im leichten bzw. schweren Polyederspiel für alle $N \in NP$.*

Beweis. Sei $N \in NP$ nicht monomial. Sei $(N^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der Spielzüge (zu gegebenen Strategien von Kaninchen und Hutmacher). Angenommen **K** ist keine Gewinnstrategie. Dann ist, da b eine Bewertung ist,

$$\big(b(N^m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$$

eine streng monoton fallende Folge in W. Dies ein Widerspruch zur Wohlordnung von W. ☺

Mit Hilfe von Höhe und Länge werden wir nun eine Bewertung für das leichte Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ angeben.

Definition: Sei wieder $\mathcal{NP}_2$ die Menge aller Newton Polygone in $\mathbb{R}^2_+$. Die Funktion inv sei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{inv} : \mathcal{NP}_2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ N & \longrightarrow & \Big(\mathsf{H}(N), \mathsf{Stg}(N)\Big) \end{array}.$$

Der folgende Hilfssatz untersucht das Verhalten von inv bei einem Spielzug im einfachen Polyederspiel.

***Hilfssatz* 15:** *Die oben definierte Funktion* inv *ist eine Bewertung für des leichte Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$. Genauer: Sei N ein Newton Polygon in $\mathbb{R}^2_+$. Für $J = \{1, 2\}$ und $j \in J$ setzen wir wie üblich*

$$N' = \tau_{\{1,2\},j}(N),$$

das Polygon nach einem Spielzug. (Dabei ist $\tau_{\{1,2\},j}$ jene lineare Abbildung, die die j-te Komponente eines Tupels durch die Summe beider Komponenten ersetzt und die anderen Komponenten unverändert lässt.) Dann gilt: Ist N nicht monomial, so ist

$$\mathsf{inv}(N') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(N).$$

Beweis. Seien γ, β und κ Galions-, Bug- und Kielpunkt von N. Weiters seien

$$\begin{array}{rcl} \gamma' & = & (\gamma'_1, \gamma'_2) := \gamma(N'), \\ \beta' & = & (\beta'_1, \beta'_2) = \beta(N'), \\ \kappa' & = & (\kappa'_1, \kappa'_2) = \kappa(N'), \end{array}$$

Galions-, Bug- und Kielpunkt von N'.

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathsf{H}(N) &= \gamma_2 - \kappa_2 \quad \text{und} \quad \mathsf{Stg}(N) = \beta_1 - \gamma_1, \\ \mathsf{H}(N') &= \gamma_2' - \kappa_2' \quad \text{und} \quad \mathsf{Stg}(N') = \beta_1' - \gamma_1'. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwischen den $j = 1$ und $j = 2$, zwei Wahlmöglichkeiten des Hutmachers:

Fall 1: Sei $j = 1$. Dann ist $N' = \tau_{\{1,2\},1}(N)$ und für eine beliebige Ecke e von N gilt:

$$\tau_{\{1,2\},1}(e) = (e_1 + e_2, e_2).$$

Beachte, dass damit immer der Kielpunkt von N zum Kielpunkt von N' wird. Es gilt also die Gleichung

$$\kappa' = \tau_{\{1,2\},1}(\kappa) = (\kappa_1 + \kappa_2, \kappa_2).$$

Fall 1a: Es gelte $\gamma' = \tau_{\{1,2\},1}(\gamma)$. Das heißt, der Galionspunkt von N wird zum Galionspunkt von N'. Dann ist $\mathsf{H}(N) = \mathsf{H}(N')$. Wir zeigen, dass die Steigung kleiner wird. Dazu überlegen wir zuerst, dass $\tau_{J,j}(\beta) = \beta'$ ist (der Bugpunkt von N wird zum Bugpunkt von N'):

Aufgrund der Definition gilt für γ und β die Ungleichung

$$1 > \frac{\gamma_2 - \beta_2}{\beta_1 - \gamma_1}.$$

Da β eine Ecke von N ist, gilt für jede Ecke e von N mit $e_2 < \beta_2$ die Ungleichung

$$\beta_2 - e_2 > e_1 - \beta_1$$

und mehr noch

$$\frac{\beta_2 - e_2}{e_1 - \beta_1} < \frac{\gamma_2 - \beta_2}{\beta_1 - \gamma_1}.$$

Daraus folgt aber:

$$\frac{\beta_2 - e_2}{e_1 - \beta_1} < \frac{\gamma_2 - \beta_2}{\beta_1 - \gamma_1} < 1.$$

Wir erhalten:

$$\beta_2 - e_2 < e_1 - \beta_1 \Longleftrightarrow \beta_1 + \beta_2 < e_1 + e_2.$$

Es folgt, dass $\tau_{\{1,2\},1}(\beta) = (\beta_1 + \beta_2, \beta_2)$ eine Ecke von N' und damit $\beta' = \tau_{\{1,2\},1}(\beta)$ ist. (Beachte, dass damit auch die Gleichung $\mathsf{L}(N') = \mathsf{L}(N)$ gilt.)

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{Stg}(N') &= \beta_1' - \gamma_1' \\ &= \beta_1' - \gamma_1' \\ &= \beta_1 + \beta_2 - (\gamma_1 + \gamma_2) \\ &= \beta_1 - \gamma_1 - \underbrace{(\gamma_2 - \beta_2)}_{>0} < \beta_1 - \gamma_1 = \mathsf{Stg}(N). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathsf{inv}(N') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(N).$$

Fall 1b: Ist $\gamma' \neq \tau_{\{1,2\},1}(\gamma)$, dann gibt es eine Ecke $e \neq \gamma$ von N so, dass $\tau_{\{1,2\},1}(e) = (e_1 + e_2, e_2)$ der Galionspunkt von N' ist (siehe Abbildung 28). Für die Ecke e gilt die Ungleichung

$$e_2 < \gamma_2.$$

Daher ist

$$\mathsf{H}(N') = \gamma_2' - \kappa_2' = e_2 - \kappa_2 < \gamma_2 - \kappa_2 = \mathsf{H}(N),$$

und die Behauptung ist gezeigt.

Fall 2: Es sei $j = 2$. Dann ist $N' = \tau_{\{1,2\},2}(N)$ und für eine beliebige Ecke e von N gilt:

$$\tau_{\{1,2\},2}(e) = (e_1, e_1 + e_2).$$

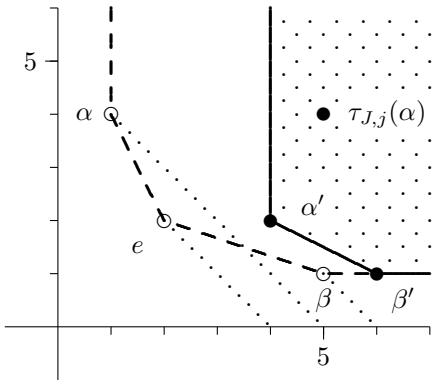


Abbildung 28 : Hier ist $\alpha' \neq \tau_{J,j}(\alpha)$.

Beachte, dass damit immer der Galionspunkt von N zum Galionspunkt von N' wird. Es gilt also die Gleichung

$$\gamma' = \tau_{\{1,2\},2}(\gamma) = (\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2).$$

Ist N' monomial, sind wir fertig. Ist N' nicht monomial, gibt es eine Ecke $e \neq \gamma$ von N so, dass $\tau_{\{1,2\},2}(e) = (e_1, e_1 + e_2)$ der Kielpunkt κ' von N' ist. Für diese Ecke gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} e_1 &\geq \gamma_1 + 1, \\ e_2 &\geq \kappa_2. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\mathsf{H}(N') = \gamma_2' - \kappa_2' = \gamma_1 + \gamma_2 - (e_1 + e_2) \leq \gamma_1 + \gamma_2 - (\gamma_1 + 1 + \kappa_2) = \gamma_2 - \kappa_2 - 1 < \gamma_2 - \kappa_2 = \mathsf{H}(N).$$

Damit ist

$$\mathsf{inv}(N') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(N).$$

☺

Folgerung : *Es gibt eine Gewinnstrategie für das Kaninchen für das leichte Polyederspiel in* $\mathbb{N}^2$.

Beweis. Nach dem vorhergehenden Hilfssatz 15 ist inv eine Bewertung und damit folgt die Behauptung aus Hilfssatz 14. ☺

Diese letzte Folgerung weckt die Hoffnung, dass sich mit Höhe und Steigung auch eine Bewertung für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ definieren lässt. Nach Folgerung 13 kann die Höhe nicht steigen. Weiters hat sich gezeigt, dass beim einfachen Polyederspiel die Steigung fällt, falls die Höhe (und damit die Länge) gleich bleibt. In Beispiel 6 bleibt die Höhe des Polyeders nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel gleich, die Steigung bleibt aber ebenfalls gleich. Die für das leichte Polyederspiel verwendete Bewertung kann also nicht ohne weiteres für das schwere Polyederspiel übernommen werden. Die Lösung liegt darin, die Bewertung unabhängig von Koordinatenwechseln zu machen. Darum sprechen wir dann auch statt von einer Bewertung von einer Invariante.

3.6 Lösung des schweren Polyederspiels in $\mathbb{N}^2$

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe einer Bewertung inv bewiesen, dass das Kaninchen auch das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ gewinnt.

Im Folgenden sei f eine Potenzreihe in fixen Koordinaten. Da das Aussehen der Potenzreihe von der Wahl der Koordinaten abhängt, sollten nicht bestimmte Koordinaten bevorzugt werden. Eine Bewertung inv muss daher so konstruiert sein, dass sie nicht von den Koordinaten abhängt. Das heißt, es gilt $\mathsf{inv}(f) = \mathsf{inv}(\psi(f))$ für einen beliebigen Koordinatenwechsel ψ.

Definition: Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine Potenzreihe in gegebenen Koordinaten.

Die Menge $I(f)$ enthalte alle Potenzreihen, die aus f durch einen Koordinatenwechsel hervorgehen, und für die Höhe und Länge minimal (in dieser Reihenfolge) sind und die Steigung maximal ist.

In Zeichen: Sei W_f die Menge jener Potenzreihen, die aus f durch einen Koordinatenwechsel hervorgehen, also

$$W_f := \Big\{ \psi(f) \ : \ \psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}[[x,y]]) \Big\}.$$

Nun definiere

$$I_f := \Big\{ g \in W_f \ : \ \big(\mathsf{H}(g), \mathsf{L}(g)\big) \leq_{\mathrm{lex}} \big(\mathsf{H}(h), \mathsf{L}(h)\big) \text{ und } \mathsf{Stg}(g) \geq \mathsf{Stg}(h) \text{ für alle } h \in W_f \Big\},$$

wobei $<_{\mathrm{lex}}$ die lexikographische Ordnung mit $(0,1) <_{\mathrm{lex}} (1,0)$ sei.

Bemerkung: Hironaka würde ein Element aus I_f „sehr gut vorbereitet“nennen. In [16] beschreibt er diese Eigenschaft folgendermaßen:

Sei N ein Newton Polyeder und γ der Galionspunkt. Die Gerade durch $(0,r)$ und $(r,0)$ sei mit $S(r)$ bezeichnet. Sei i die kleinste Zahl so, dass $S(i) \cap N \neq \emptyset$ ist. Der tiefste Punkt auf $S(i) \cap N$ (das ist jene Ecke mit der kleinsten y Komponente) wird als $(i-\delta, \delta)$ geschrieben. Nun versuche durch Koordinatenwechsel ein möglichst großes δ zu bekommen. Ist dann $\gamma \neq (i-\delta,\delta)$, so ist N sehr gut vorbereitet. Ist hingegen $\gamma = (i-\delta,\delta)$, betrachte jene Gerade U_γ durch γ mit der größten Steigung $\varepsilon < 1$, sodass kein Teil von N unter dieser Geraden liegt. Sei nun (κ', κ) der tiefste Punkt von $U_\gamma \cap N$. Ist $\frac{1}{\varepsilon} \notin \mathbb{N}$, so sind wir wieder sehr gut vorbereitet. Ist hingegen $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{N}$, versuche κ durch Koordinatenwechsel möglichst groß zu machen. Erreichen wir $\gamma_2 = \kappa$, so wählen wir eine neue Gerade U_γ und wiederholen den Vorgang.

Hironaka schreibt weiter, dass die beschriebene Prozedur nur endlich oft ausführbar sei. Liegt dann das größte κ vor, so sei man wieder sehr gut vorbereitet. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass $I_f \neq \emptyset$ ist. Der folgende Hilfssatz beschäftigt sich mit dieser Aussage.

***Hilfssatz* 16:** *Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine Potenzreihe in gegebenen Koordinaten. Gibt es keinen Koordinatenwechsel $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}[[x,y]])$ so, dass $\varphi(f)$ monomial ist, dann ist $I_f \neq \emptyset$.*

Beweis. Klarerweise gibt es Potenzreihen in W_f, bei denen Höhe und Länge minimal sind. Das heißt:

$$H_f := \Big\{ g \in W_f \ : \ \big(\mathsf{H}(g), \mathsf{L}(g)\big) \leq_{\mathrm{lex}} \big(\mathsf{H}(h), \mathsf{L}(h)\big) \text{ für alle } h \in W_f \Big\} \neq \emptyset.$$

Auch ist klar, dass $I_f \subseteq H_f$ ist. Sei nun $g \in H_f$ mit Galionspunkt γ und Bugpunkt β. Wir zeigen die Behauptung indirekt: Angenommen $I_f = \emptyset$. Dann gibt es einen Substitutionshomomorphismus ψ_0 so, dass für $g_1 := \psi_0(g)$ gilt:

$$g_1 \in H_f \text{ und } \mathsf{Stg}(g_1) > \mathsf{Stg}(g).$$

Beachte, dass durch ψ_0 alle Monome „gelöscht“ werden, die auf der Geraden durch die Galionskante liegen. Daher ist ψ_0 gegeben durch

$$\begin{aligned} x &\to x, \\ y &\to y + p_0(x), \end{aligned}$$

wobei $p_0(x)$ ein Polynom in $\mathbb{F}[x]$ ist, mit $\mathrm{ord}(p_0) = \frac{\mathsf{Stg}(g)}{\mathsf{L}(g)}$. Wir setzen $g := g_0$ und definieren induktiv: Ist $g_i \in H_f$ bereits definiert, dann gibt es analog zur obigen Überlegung einen Koordinatenwechsel ψ_i, so dass gilt:

$$g_{i+1} \in H_f \text{ und } \mathsf{Stg}(g_{i+1}) > \mathsf{Stg}(g_i).$$

Dabei ist ψ_i gegeben durch

$$\begin{aligned} x &\to x, \\ y &\to y + p_i(x), \end{aligned}$$

wobei $p_i(x)$ ein Polynom in $\mathbb{F}[x]$ ist, mit $\mathrm{ord}(p_i) = \frac{\mathsf{Stg}(g_i)}{\mathsf{L}(g_i)}$. Daher gilt $\mathrm{ord}(p_{i+1}) > \mathrm{ord}(p_i)$ für alle i. Damit konvergieren aber die ψ_i in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie zu einem Koordinatenwechsel ψ. Für diesen gilt nach Konstruktion, dass $\psi(g)$ monomial ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass es keinen Koordinatenwechsel φ gibt, sodass $\varphi(f)$ monomial ist. ☺

Definition: Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine Potenzreihe in gewählten Koordinaten und $g \in I_f$ (das heißt, $g = \psi(f)$ und Höhe und Länge sind minimal, die Steigung ist maximal).Dann sei inv wie folgt definiert:

$$\mathsf{inv}(f) := \Big(\mathsf{H}(g), \mathsf{Stg}(g)\Big).$$

Ist inv eine Bewertung, dann gewinnt das Kaninchen das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$. Bevor dies bewiesen wird, noch einige Vorbereitungen.

***Hilfssatz* 17:** *Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$, $g \in I_f$ und $g' := g(x, yx)$. Es gelte weiters*

$$\mathsf{H}(g') = \mathsf{H}(g)$$

und $\mathsf{H}(g')$ und $\mathsf{L}(g')$ seien minimal (das heißt, $\mathsf{H}(g') \le \mathsf{H}(h), \mathsf{L}(g') \le \mathsf{L}(h)$ für alle $h \in W_{g'}$). Dann gilt:

$$g' \in I_{g'}.$$

Beweis. Seien γ, β bzw. γ', β' Galions- und Bugpunkt von g bzw. g'. Da nach Voraussetzung $\mathsf{H}(g) = \mathsf{H}(g')$ ist, ist $\mathsf{L}(g') = \mathsf{L}(g)$ und es gilt (siehe Beweis von Hilfssatz 15 Fall 1a):

$$\alpha' = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2) \text{ und } \beta' = (\beta_1 + \beta_2, \beta_2).$$

Angenommen, $g' \notin I_{g'}$. Dann gibt es einen Koordinatenwechsel $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}[[x,y]])$ so, dass für $h := \psi(g')$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{H}(h) &= \mathsf{H}(g'), \\ \mathsf{L}(h) &= \mathsf{L}(g'), \\ \mathsf{Stg}(h) &< \mathsf{Stg}(g'). \end{aligned}$$

(Die ersten beiden Gleichungen folgen aus der Voraussetzung, die Ungleichung, da $g' \notin I_{g'}$ ist.) Daraus folgt, dass auf der Geraden durch α' und β' außer α' keine anderen Punkte von $\mathrm{Tr}(h)$ liegen (β' wurde sozusagen „gelöscht“). Daher können wir annehmen, dass ψ durch

$$\begin{aligned} x &\to x, \\ y &\to y + p(x), \end{aligned}$$

mit $p(x) \in \mathbb{F}[[x]], \mathrm{ord}(p) \ge 1$, gegeben ist. Betrachten wir nun $\widetilde{\psi}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x, \\ y &\longrightarrow y + xp(x). \end{aligned}$$

Bezeichnet nun $\mathsf{T}_{\{1,2\},1}$ den durch $(x,y) \to (x, yx)$ gegebenen Koordinatenwechsel (ein Spielzug), dann gilt:

$$\begin{aligned} \psi\big(g'(x,y)\big) &= \psi\big(g(x,yx)\big) \\ &= g\big(x, yx + xp(x)\big) \\ &= \mathsf{T}_{\{1,2\},1}\Big(g\big(x, y + xp(x)\big)\Big) \\ &= \mathsf{T}_{\{1,2\},1}\Big(\widetilde{\psi}\big(g(x,y)\big)\Big) \\ &= \Big(\widetilde{\psi}\big(g(x,y)\big)\Big)'. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber, dass, außer α, kein Punkt von $\mathrm{Tr}\left(\widetilde{\psi}(g)\right)$ auf der Geraden durch α und β liegt (das heißt, der Punkt β hätte durch den Koordinatenwechsel „gelöscht“ werden können). Dies ist ein Widerspruch zu $g \in I_f$. ☺

Definition : Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$. Die Potenzreihe f heißt anliegend (bezüglich y), wenn $\mathrm{ord}_y(f) = 0$ ist. Ist $\mathrm{ord}_y(f) \neq 0$ so heißt f nicht anliegend (bezüglich y). (Analog definiert man anliegend/nicht anliegend bezüglich x. Im Folgenden ist immer (nicht) anliegend bezüglich y gemeint, wenn von (nicht) anliegend die Rede ist.)

Sei weiters $(f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der Spielzüge im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$.

1. Die Folge der Spielzüge heißt stationär anliegend, falls es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass f_m anliegend ist für alle $m \geq m_0$.
2. Die Folge der Spielzüge heißt stationär nicht anliegend, falls es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass f^m nicht anliegend ist für alle $m \geq m_0$.
3. Die Folge der Spielzüge heißt alternierend, falls sie weder stationär anliegend noch stationär nicht anliegend ist.

Um zu zeigen, dass das Kaninchen im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ immer gewinnt, zeigen wir folgende Fälle:

1. Das Kaninchen gewinnt, wenn die Folge der Spielzüge stationär nicht anliegend ist.
2. Das Kaninchen gewinnt, wenn die Folge der Spielzüge stationär anliegend ist.
3. Das Kaninchen gewinnt, wenn die Folge der Spielzüge alternierend ist.

***Hilfssatz* 18 :** *Gegeben sei eine nicht anliegende Potenzreihe f. Spielt der Hutmacher so, dass die Folge $(f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielzüge im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ stationär nicht anliegend ist, dann gewinnt das Kaninchen.*

Beweis. Ist inv eine Bewertung für die Menge der hohen Potenzreihen, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 14. Um zu zeigen, dass die Funktion inv eine Bewertung für alle hohen Potenzreihen ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \in I_f$ und $f'(x,y) = f(x, xy + tx)$, mit $t \in \mathbb{F}$. (Für $f'(x,y) = f(xy + ty, y)$ gelten die gleichen Überlegungen, wie im Folgenden. Allerdings muss man Höhe, Länge und Steigung bezüglich x betrachten.) Wir zeigen die Ungleichung:

$$\mathsf{inv}(f') <_{\mathrm{lex}} \mathsf{inv}(f).$$

Ist $t = 0$, so folgt aus dem Hilfssatz 15 (einfaches Polyederspiel):

$$\mathsf{H}(f') < \mathsf{H}(f),$$

und wir sind fertig. Oder es ist

$$\mathsf{H}(f') = \mathsf{H}(f) \text{ und } \mathsf{Stg}f' < \mathsf{Stg}(f).$$

(Beachte, dass, wie im Beweis von Hilfssatz 15 Fall 1a gezeigt, aus $\mathsf{H}(f') = \mathsf{H}(f)$ auch $\mathsf{L}(f') = \mathsf{L}(f)$ folgt.) Nach Hilfssatz 17 ist $f' \in I_{f'}$ und damit ist

$$\mathsf{inv}(f') < \mathsf{inv}(f).$$

Sei nun $t \neq 0$. Weiters sei $\mathrm{ord}(f) = d$ und f_d die Initialform von f. Ist f_d ein Monom, dann ist f' monomial nach Hilfssatz 9 und wir sind fertig. Ist f_d kein Monom, dann ist

$$f_d(x,y) := \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i},$$

für gewisse $m, n \in \mathbb{N}$ mit $d = m + n$. Damit ist

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i} + F(x,y)$$

für ein $F \in \mathbb{F}[[x,y]]$ mit $\mathrm{ord}(F) > d$. Beachte dass $\mathsf{H}(f) \geq a$ ist. Folgerung 13 auf Seite 41 zeigt, dass für die Ecke $\gamma' := \gamma(f') = (\gamma'_1, \gamma'_2)$ gilt:

$$\gamma'_2 \leq a = \mathsf{H}(f).$$

Da f' nach Voraussetzung nicht anliegend ist, gilt für die Ecke $\kappa' := \kappa(f') = (\kappa'_1, \kappa'_2)$:

$$\kappa'_2 \geq 1.$$

Damit folgt:

$$\mathsf{H}(f') = \gamma'_2 - \kappa' - 2 \leq a - 1 = \mathsf{H}(f) - 1.$$

Also gilt für $g' \in I_{f'}$:

$$\mathsf{H}(g') \leq \mathsf{H}(f') < \mathsf{H}(f),$$

und die Behauptung ist gezeigt. ☺

Folgender Hilfssatz dient als Vorbereitung für den Beweis, dass das Kaninchen gewinnt, wenn die Folge der Spielzüge stationär anliegend ist.

***Hilfssatz* 19 :** *Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ anliegend und $g \in I_f$. Sind Länge und Steigung von g gleich groß, so ist die Länge echt kleiner als die Höhe. Genauer: Sei $d = \mathrm{ord}(g)$ und g_d die Initialform von g. Dann folgt aus der Gleichung $\mathsf{L}(g) = \mathsf{Stg}(g)$ die Ungleichung:*

$$\mathsf{H}(g_d) = \mathsf{Stg}(g) = \mathsf{L}(g) \leq \mathsf{H}(g) - 1.$$

Beweis. Die Gleichung $\mathsf{H}(g_d) = \mathsf{Stg}(g) = \mathsf{L}(g)$ folgt aus der Definition von Höhe, Steigung und Länge (siehe Abbildung 29).

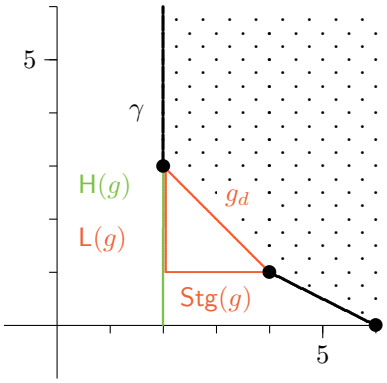


Abbildung 29 : Es gilt: $\mathsf{L}(g) = \mathsf{Stg}(g) = \mathsf{H}(g_d)$.

Nach Annahme ist g anliegend bezüglich y, das heißt, $\mathrm{ord}_y(f) = 0$. Daher besitzt g die folgende Form:

$$g(x,y) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{a-i} + G(x,y),$$

mit $c_0 \neq 0$ und $\mathrm{ord}(G) > m + a$ und $\mathrm{ord}_x(G) \geq m$. (Dann ist nämlich $\mathsf{H}(g) = \mathsf{H}(g_d)$.) Sei nun ψ der durch

$$\begin{aligned} x &\to x, \\ y &\to x + tx, \end{aligned}$$

gegebene Koordinatenwechsel. Dann ist

$$\psi(g) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} (y + tx)^{a-i} + G(x, y + tx).$$

Wir schreiben $\psi(g)$ als:

$$\psi(g) = \sum_{i=0}^{a} c'_i x^{m+i} y^{a-i} + G'(x,y).$$

mit $\mathrm{ord}(G') > m+a$ und $\mathrm{ord}_x(G') > m$. Für den Koeffizienten c'_a gilt die Gleichung:

$$c'_a := c_a + c_{a-1}t + c_{a-2}t^2 + \ldots + c_1 t^{a-1} + c_0 t^a.$$

Da nach Voraussetzung $\mathbb{F}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $t \in \mathbb{F}$ so, dass $c'_a = 0$ ist. Für dieses t gilt dann aber:

$$\widetilde{g} := \psi(g) = c'_{a-1} x^{m+a-1} y + c'_{a-2} x^{m+a-2} y^2 + \ldots.$$

Daraus folgt für $\widetilde{g}_d$, die Initialform von $\widetilde{g}$:

$$\mathsf{L}(\widetilde{g}) < \mathsf{L}(g).$$

Dies ist ein Widerspruch zu $g \in I_f$. ☺

***Hilfssatz* 20 :** *Gegeben sei eine anliegende Potenzreihe f. Spielt der Hutmacher so, dass die Folge $(f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielzüge im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ stationär anliegend ist, dann gewinnt das Kaninchen.*

Beweis. Ist inv eine Bewertung für die Menge der anliegenden Potenzreihen, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 14 auf Seite 43. Um zu zeigen, dass die Funktion inv eine Bewertung für alle anliegenden Potenzreihen ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \in I_f$ und $f'(x,y) := f(x, xy + tx)$, mit $t \in \mathbb{F}$. (Für $f'(x,y) = f(xy + ty, y)$ gelten die gleichen Überlegungen, wie im Folgenden. Allerdings ist dann f' anliegend bezüglich x.) Wir zeigen die Ungleichung:

$$\mathsf{inv}(f') <_{\mathrm{lex}} \mathsf{inv}(f).$$

Ist $t = 0$, so zeigt man die Behauptung wie in Hilfssatz 18.

Sei also $t \neq 0$. Weiters sei $\mathrm{ord}(f) = d$ und f_d die Initialform von f. Ist f_d ein Monom, dann ist f' monomial nach Hilfssatz 9 und wir sind fertig. Ist f_d kein Monom, dann ist $\mathsf{H}(f_d) \leq \mathsf{H}(f) - 1$ nach dem vorherigen Hilfssatz 19, das heißt,

$$\mathsf{H}(f_d) < \mathsf{H}(f).$$

Nach Folgerung 13 gilt aber auch $\mathsf{H}(f') \leq \mathsf{H}(f_d)$. Also gilt für $g' \in I_{f'}$:

$$\mathsf{H}(g') \leq \mathsf{H}(f') \leq \mathsf{H}(f_d) < \mathsf{H}(f),$$

und damit $\mathsf{inv}(f') < \mathsf{inv}(f)$, was die Behauptung beweist. ☺

Bei stationären Spielfolgen gewinnt also das Kaninchen. Doch es bleibt auch bei alternierenden Spielfolgen Sieger. Folgender Hilfssatz dient als Vorbereitung, um dies zu zeigen.

***Hilfssatz* 21 :** *Sei f eine anliegende Potenzreihe in zwei Variablen und f' die Potenzreihe nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel. Ist f' nicht anliegend, dann ist*

$$\mathsf{H}(f') < \mathsf{H}(f).$$

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \in I_f$ und f anliegend bezüglich y. Damit ist f' nur dann nicht anliegend, wenn

$$f'(x,y) = f(xy + tx, y)$$

ist. (Die Potenzreihe $f(x, yx)$ wäre wieder anliegend, und $f(x, yx + tx)$ muss anliegend sein, da sonst $f(x, y + tx)$ eine kleinere Höhe als f hätte, im Widerspruch zu $f \in I_f$.)

Sei $t = 0$. Ist $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ der Galionspunkt von f, dann gilt für den Galionspunkt γ' von f'

$$\gamma' = (\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2).$$

Sei weiters κ der Kielpunkt von f. Ist f' nicht monomial, gibt es eine Ecke $e \neq \gamma$ von f so, dass $(e_1, e_1 + e_2)$ der Kielpunkt von f' ist. Für diese Ecke gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} e_1 &\geq \gamma_1 + 1, \\ e_2 &\geq \kappa_2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung, denn es ist

$$\mathsf{H}(f') = \gamma_2' - \kappa_2' = \gamma_1 + \gamma_2 - (e_1 + e_2) \leq \gamma_1 + \gamma_2 - (\gamma_1 + 1 + \kappa_2) = \gamma_2 - \kappa_2 - 1 < \gamma_2 - \kappa_2 = \mathsf{H}(f).$$

Sei $t \neq 0$. Sei γ' der Galionspunkt von f' bezüglich x. Dann gilt nach Hilfssatz 10

$$\gamma_1' \leq \mathsf{H}(f).$$

(Beachte, dass die Höhe von f bezüglich y gemessen wird.) Da f' nach Voraussetzung nicht anliegend ist, gilt für den Kielpunkt κ' (bezüglich x) von f':

$$\kappa_1' \geq 1.$$

Insgesamt folgt die Behauptung, denn es gilt:

$$\mathsf{H}(f') = \gamma_1' - \kappa_1' \leq \mathsf{H}(f) - 1 < \mathsf{H}(f).$$

(Beachte, dass die Höhe von f bezüglich y, die Höhe von f' aber bezüglich x gemessen wird.) ☺

***Hilfssatz* 22 :** *Gegeben sei eine Potenzreihe f in zwei Variablen. Spielt der Hutmacher so, dass die Folge $(f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielzüge im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ alternierend ist, dann gewinnt das Kaninchen.*

Beweis. Betrachte die Teilfolge $(f^{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ der anliegenden Potenzreihen des Spiels, das heißt, $(f^{nu(m)}$ ist anliegend für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{inv}(f^{\nu(m)}) <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(f^{nu(m+1)}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Sei $f^{\nu(m)} = f^n$ und $f^{\nu(m+1)} = f^{n+l}$. (Beachte, dass beide Potenzreihen nach Voraussetzung anliegend sind.) Ist $l = 1$, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 20. Ist $l > 1$, so gilt für alle $0 < k < l$, dass f^{n+k} nicht anliegend ist. Nach Hilfssatz 21 und Folgerung 13 gelten für alle $0 < k < l$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathsf{H}(f^{n+k}) &< \mathsf{H}(f^n), \\ \mathsf{H}(f^{n+l}) &\leq \mathsf{H}(f^{n+k}). \end{aligned}$$

Daher folgt die Behauptung, denn es ist:

$$\mathsf{H}(f^{\nu(m+1)}) = \mathsf{H}(f^{n+l} \leq \mathsf{H}(f^{n+k} < \mathsf{H}(f^n) = \mathsf{H}(f^{\nu(m)}).$$

☺

Damit können wir folgenden Satz als Hauptergebnis dieses Abschnittes formulieren.

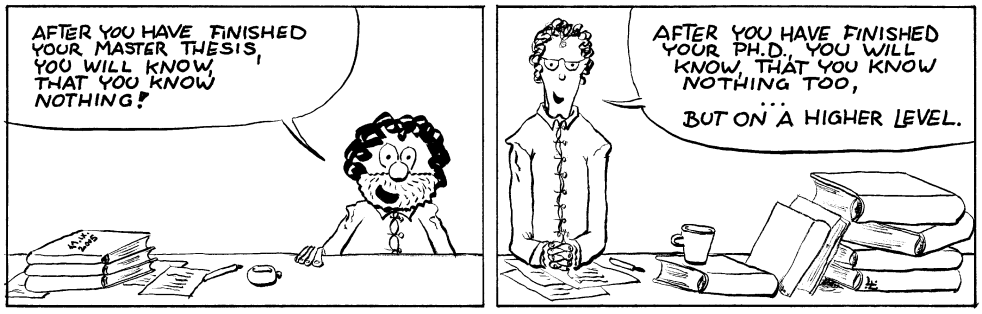
***Satz* 23 :** *Es gibt eine Gewinnstrategie des Kaninchens für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$.*

Beweis. Wir betrachten für eine gegebene Strategie des Hutmachers die Folge $(f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielzüge. Ist diese stationär nicht anliegend bzw. stationär anliegend, so folgt die Behauptung aus dem Hilfssatz 18 bzw. Hilfssatz 20. Ist sie hingegen alternierend, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 22. ☺

Bemerkung : Der Sieg des Kaninchens im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ entspricht dem Auflösen von ebenen Kurvensingularitäten. Es ist schon lange bekannt, dass dies möglich ist. Siehe dazu etwa die Arbeit von Georg Regensburger und Herwig Hauser [14]. Dort wird im Wesentlichen

das Polyederspiel für anliegende Polyeder betrachtet. Für den Beweis wird eine Invariante mit Ordnung und Steigung verwendet. Die Ordnung entspricht im anliegenden Fall fast der Höhe (zumindest in den kritischen Fällen), und die Steigung entspricht im Wesentlichen der oben definierten (genauer: die Steigung bei Regensburger und Hauser entspricht dem Wert $\frac{\mathsf{Stg}}{\mathsf{L}}$).

Im Kapitel 4 wird gezeigt, warum es von Vorteil ist, sich nicht nur auf anliegende Polyeder zu beschränken.



Kapitel 4

Das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$, Charakteristik 0

In diesem Kapitel sei $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik 0 bzw. ein Ring mit $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{F}$. Mit Induktion über die Dimension n wird gezeigt, dass es eine Gewinnstrategie für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$ gibt. Dazu werden die Begriffe *Galions-, Bug-, Kielpunkt* und *Höhe*, die beim schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ nützlich waren, für spezielle Polyeder in $\mathbb{N}^n$ verallgemeinert. Diese speziellen Polyeder werden aufgrund ihres Aussehens *Rümpfe* genannt. Es gibt eine Strategie für den Spieler 1, sodass im schweren Polyederspiel ein Rumpf „erspielt" werden kann. Der Beweis dafür gelingt mit Hilfe einer Gewinnstrategie in einer niedereren Dimension, sowie mit dem Konzept des *Projektionspolyeders*. Liegt ein Rumpf vor, lässt sich eine Strategie angeben, mit der Spieler 1 die Höhe des Rumpfes kleiner machen kann. Eine wesentliche Rolle spielt dabei auch die so genannte *Tschirnhaus Transformation*. (Besitzt der Körper hingegen Charakteristik p, verliert die Tschirnhaus Transformation ihre Bedeutung. Doch es ist immerhin möglich den kritischen Fall in $\mathbb{N}^3$ zu lösen. Dieser lässt sich als *Golfspiel* formulieren, das im Kapitel 5 behandelt wird.)

4.1 Induktionsannahme

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$ oder ein Ring mit $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{F}$. Weiters sei $F(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ eine formale Potenzreihe in $\mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ mit fixen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$. Das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$, Charakteristik 0, ist nun wie folgt definiert:

Zwei Spieler, das Kaninchen und der Hutmacher, machen folgende Züge:

1. Das Kaninchen wählt ein nichtleeres $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
2. Der Hutmacher wählt unter Berücksichtigung von F und J ein $j \in J$ und für $i \in J, i \neq j$ $t_i \in \mathbb{F}$. Dann ersetzt er F durch $F' := \varphi(F)$. Dabei sei φ der durch

$$\begin{array}{lcll} x_i & \longrightarrow & x_j x_i + t_i x_j & \text{für } i \in J, i \neq j, \\ x_k & \longrightarrow & x_k & \text{sonst,} \end{array}$$

   gegebene Substitutionshomomorphismus.

Dann wiederholen die beiden Spieler ihre Züge. Sei $(F^i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge der resultierenden Potenzreihen, also $F^0 := F, F^1 := F', F^2 := F''$, etc. Das Kaninchen gewinnt, wenn nach endlich vielen Zügen, etwa m, die Potenzreihe F^m bis auf einen Koordinatenwechsel eine monomiale Potenzreihe ist. Das heißt, es gibt ein $\psi \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{F}[[\mathbf{x}]]\right)$ mit

$$G := \psi(F^m) \text{ und } G(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\alpha Q(\mathbf{x}) \text{ mit } Q \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]], Q(0) \neq 0.$$

Eine Strategie des Kaninchens ordnet jedem $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ ein $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ zu. Eine Strategie des Hutmachers ordnet jedem Paar (F, J) mit $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ und $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ein $j \in J$ und $t_i \in \mathbb{F}$ für $i \in J, i \neq j$ zu. Gewinnt das Kaninchen mit einer Strategie unabhängig von der Strategie des Hutmachers, sprechen wir von einer Gewinnstrategie des Kaninchens.

Definition : Sei φ ein Koordinatenwechsel, der durch

$$\begin{aligned} x_1 &\longrightarrow x_1 + f_1, \\ x_2 &\longrightarrow x_2 + f_2, \\ &\vdots \\ x_n &\longrightarrow x_n + f_n, \end{aligned}$$

gegeben ist. Gilt für $1 \leq i \leq n$

$$f_i \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n]],$$

so nennen wir φ einen μ Koordinatenwechsel in $x_1, \ldots, x_n$.

***Induktionsannahme* 24 :** *Es gibt eine Gewinnstrategie für das Kaninchen für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$, Charakteristik 0.*

Genauer: Es gibt eine Strategie des Kaninchens, sodass es zu jedem $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ und zu jeder Strategie des Hutmachers ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit:

F^m ist bis auf einen μ Koordinatenwechsel monomial.

Für $n = 1$ ist die Induktionsannahme klarerweise erfüllt, da nach Definition jedes $f \in \mathbb{F}[[x]]$ monomial ist.

Bevor wir den Induktionsschritt beweisen können, müssen noch die Konzepte „Projektionspolyeder“, „Rumpf“ und „Tschirnhaus Transformation“ eingeführt werden.

4.2 Rümpfe

Spezielle Polyeder besitzen das Aussehen von Schiffsrümpfen (siehe dazu Abbildung 30). In diesem Abschnitt wird der Begriff Rumpf definiert. Damit lassen sich dann die aus dem $\mathbb{N}^2$ bekannten Begriffe Galions-, Bug-, Kielpunkt und Höhe auch für Polyeder in $\mathbb{N}^n$ verallgemeinern. Weiters wird gezeigt, dass es für das Kaninchen eine Strategie gibt, um einen beliebigen Polyeder in $\mathbb{N}^{n+1}$ in einen Rumpf zu „verwandeln“, falls es eine Gewinnstrategie das Kaninchens in $\mathbb{N}^n$ gibt. Der Beweis dafür verwendet das Konzept des Projektionspolyeders, das auf Hironaka zurückgeht.

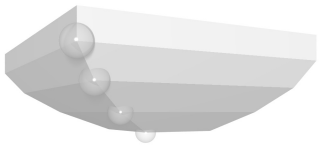


Abbildung 30 : Ein einem Schiffsrumpf ähnlicher Polyeder.

4.2.1 Motivation und mögliche Probleme

Sei

$$F(x, y, z) = z^2 + x^2y^7 + x^3y^4 + x^4y^3 + x^8y^2.$$

Dies ist „fast“ ein Polynom in den zwei Variablen x und y. Da wir eine Gewinnstrategie in $\mathbb{N}^2$ besitzen, liegt es nahe, vorerst nur die xy-Ebene zu betrachten und in dieser zu arbeiten wie im zweidimensionalen Fall für $f(x, y) = x^2y^7 + x^3y^4 + x^4y^3 + x^8y^2$ (siehe Abbildung 31). Mit Hilfe von Explosionen in x und y lässt sich der Polyeder in der xy-Ebene monomial machen, wie der folgende beispielhafte Spielverlauf nahe legt:

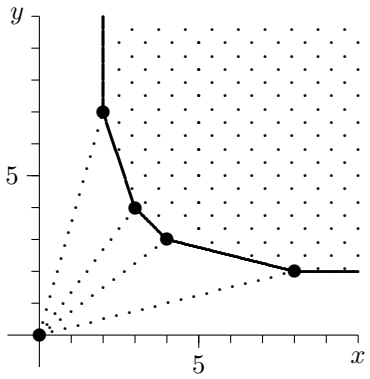


Abbildung 31 : Aufsicht auf den zu F gehörenden Newton Polyeder.

Sei $J = \{1, 2\}$ und $j = 1$. Dann ist (siehe Abbildung 32):

$$\begin{aligned} F^1(x, y, z) &= F(x, xy, z) \\ &= z^2 + x^8y^7 + x^6y^4 + x^6y^3 + x^9y^2. \end{aligned}$$

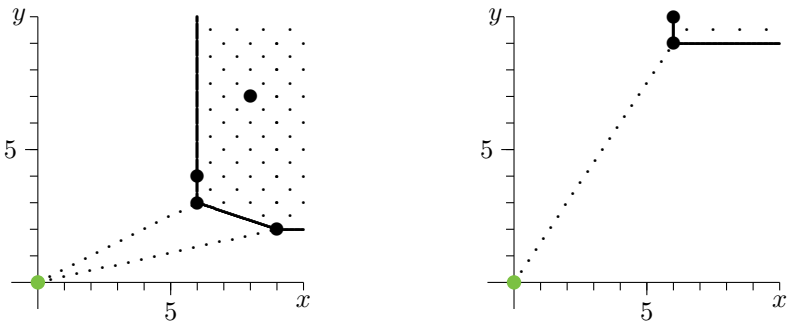


Abbildung 32 : Aufsicht auf die zu F^1 und F^2 gehörenden Newton Polyeder.

Für $J = \{1, 2\}$ und $j = 2$ ist weiters (siehe Abbildung 32):

$$\begin{aligned} F^2(x, y, z) &= F^1(xy, y, z) \\ &= z^2 + x^8y^{15} + x^6y^{10} + x^6y^9 + x^9y^{11}. \end{aligned}$$

Der durch $f(x, y) := x^8y^{15} + x^6y^{10} + x^6y^9 + x^9y^{11}$ definierte Polyeder ist nun monomial. Mehr noch: Der zu F^2 gehörende, dreidimensionale Polyeder besitzt nur zwei Ecken und ähnelt einem einfachen Schiffsrumpf, der auf der xy-Ebene „schwimmt“. Daher nennen wir $\gamma = (0, 0, 2)$ den Galionspunkt und $\kappa = (6, 9, 0)$ den Kielpunkt von F. Die „Höhe“ dieses Rumpfes ist damit $\gamma_3 - \kappa_3 = 2$. Nun gibt es eine Spielfolge, in der diese Höhe kleiner wird:

Sei $J = \{2, 3\}$. Für $j = 3$ würde sich

$$G(x, y, z) = F^2(x, yz, z) = z^2 + x^8y^{15}z^{15} + x^6y^{10}z^{10} + x^6y^9z^9 + x^9y^{11}z^{11}$$

ergeben, ein monomialer Polyeder mit Ecke $(0, 0, 2)$. Sei daher $j = 2$ (siehe Abbildung 33):

$$\begin{aligned} F^3(x, y, z) &= F^2(x, y, yz) \\ &= y^2z^2 + x^8y^{15} + x^6y^{10} + x^6y^9 + x^9y^{11}. \end{aligned}$$

Beachte, dass sich die zwei Ecken des Polyeders näher gekommen sind. Nach viermaliger Wiederholung der Spielfolge $J = \{2, 3\}$ und $j = 2$ ist (siehe Abbildung 34):

$$F^7(x, y, z) = y^{10}z^2 + x^8y^{15} + x^6y^{10} + x^6y^9 + x^9y^{11}.$$

Analog ergibt sich für die Spielfolge $J = \{1, 3\}$ und $j = 3$ nach drei Spielzügen (siehe Abbildung 34):

$$F^{10}(x, y, z) = x^6y^{10}z^2 + x^8y^{15} + x^6y^{10} + x^6y^9 + x^9y^{11}.$$

Die Potenzreihe F^{10} ist monomial. Die Höhe ist damit auf 0 gefallen.

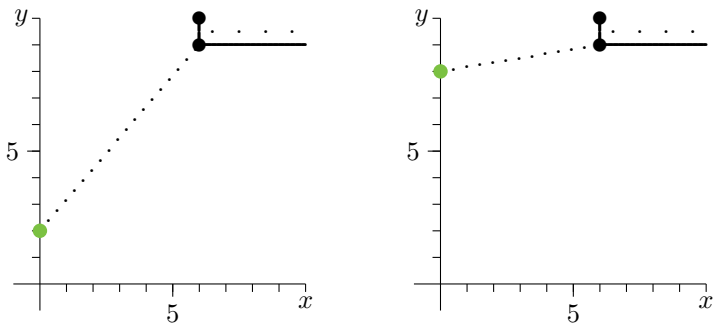


Abbildung 33: Aufsicht auf die zu F^3 und F^6 gehörenden Newton Polyeder.

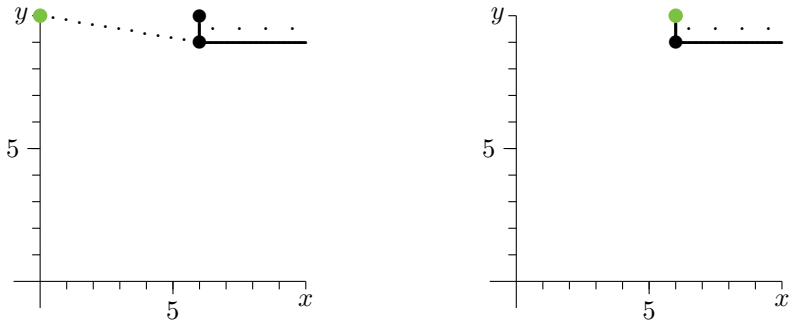


Abbildung 34: Aufsicht auf die zu F^7 und F^{10} gehörenden Newton Polyeder.

Wie lassen sich Rümpfe bauen?

Der Polyeder von oben hatte nur zwei Ecken und ähnelte damit einem Schiffsrumpf. Doch wie soll ein Rumpf mit mehreren Ecken aussehen? Sei

$$\begin{aligned} F(x,y,z) \quad = \quad & z^3(x+y) + \\ & z^2(y^3+xy) + \\ & z(xy^3+x^3y^2) + \\ & x^4y^5 + x^5y^2 + x^{10}. \end{aligned}$$

Der zu F gehörende Newton Polyeder besitzt mit einem Schiffsrumpf keine Ähnlichkeit (siehe Abbildung 35). Wie soll das Kaninchen spielen, um daraus einen Rumpf zu machen (und wie lässt sich ein Rumpf formal definieren)?

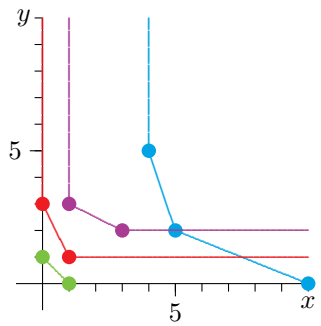


Abbildung 35: Dieser Polyeder (in Aufsicht) besitzt keine Ähnlichkeit mit einem Rumpf.

Problem beim schweren Polyederspiel

Wie beim schweren Polyederpiel in $\mathbb{N}^2$ kann es für das Kaninchen ebenfalls in $\mathbb{N}^n$ zu Problemen kommen, wenn der Hutmacher alle seine Möglichkeiten ausschöpft. Dazu folgendes Beispiel in $\mathbb{N}^3$:

Beispiel 25 : Sei $F(x,y,z) \in \mathbb{F}[[x,y,z]]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= z^2 - \\ &\quad 2xz + \\ &\quad x^2 + x^4y^3 + x^7y^3 + x^7y^2 + x^{11}y + x^{17}. \end{aligned}$$

Der zu F gehörende Newton Polyeder (siehe Abbildung 36) besitzt nur zwei Ecken.

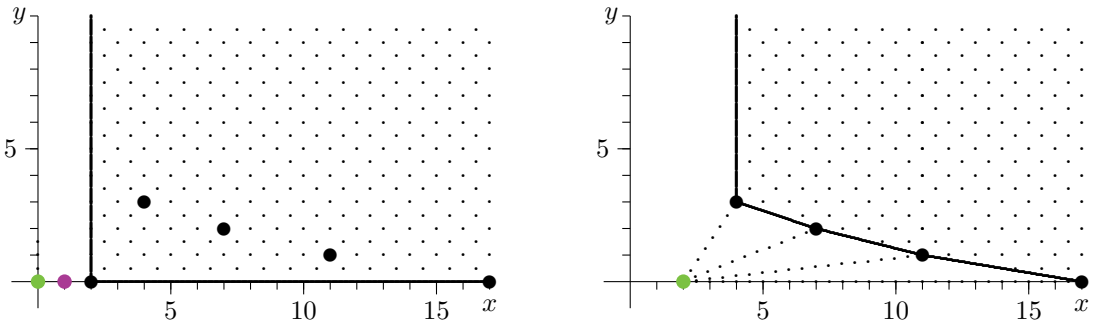


Abbildung 36 : Schöpft der Hutmacher alle seien Möglichkeiten aus, gibt es wieder Probleme: Aus einem Polyeder mit nur zwei Ecken wird ein Polyeder mit fünf Ecken.

Für $J = \{1,3\}$ würde das Spiel im leichten Polyederspiel unabhängig vom Zug des Hutmachers enden. Spielt dieser jedoch $j = 3$ mit $t = 1$, so ergibt sich (siehe Abbildung 36):

$$F'(x,y,z) = F(x,y,xz+tx) = x^2z^2 + 2x^2z - 2x^2z + x^2 + x^2 - 2x^2 + x^4y^3 + x^7y^2 + x^{11}y + x^{17}.$$

Das Spiel ist noch nicht beendet, schlimmer noch: Der zu F' gehörende Polyeder besitzt nun fünf statt zwei Ecken.

Im Abschnitt 4.3.3 wird dieses Problem mit Hilfe der Tschirnhaus Transformation gelöst. Diese Methode funktioniert allerdings nur über Körpern mit Charakteristik 0. In Körpern mit Charakteristik p wird ein anderer Ansatz benötigt, der im Kapitel 5 besprochen wird.

4.2.2 Prä-Rümpfe

Ein Polyeder in $\mathbb{N}^3$ ist im Allgemeinen nicht monomial. Trotzdem gibt es Polyeder, die „monomialer“ sind als andere. Diese werden im Folgenden definiert. Sie werden der Startpunkt sein, um Rümpfe zu konstruieren.

Seien

$$F(x,y,z) = xy + xz + yz \text{ und } G(x,y,z) = x + y + z.$$

Die zu F und G gehörenden Newton Polyeder N_F und N_G, die beide nicht monomial sind, unterscheiden sich in folgendem Sinn voneinander: Die vertikale Projektion von N_F in die xy-Ebene ist nicht monomial, die von N_G schon (siehe Abbildung 37). Der Polyeder N_G ist in diesem Sinn einem monomialen Polyeder näher als N_F. Diese Beobachtung motiviert folgende Definition:

Definition : Sei $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ und $N = N(F)$ der zu F gehörende Newton Polyeder. Dann ist F bzw. N ein Prä-Rumpf bezüglich x_i für $1 \leq i \leq n$, wenn die vertikale Projektion in die zur x_i-Achse normale Hyperebene monomial ist.

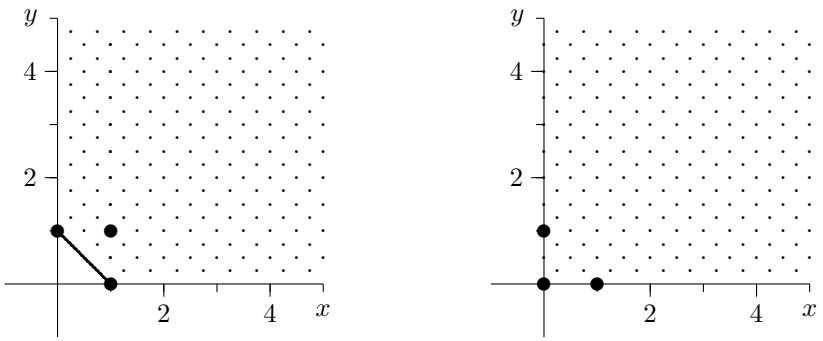


Abbildung 37 : Die Projektion von N_F ist nicht monomial, die von N_G schon.

Genauer: Die Projektion ν sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{R}_+^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{n-1}, \\ (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) &\longrightarrow (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Dann ist F bzw. N ein Prä-Rumpf bezüglich x_i, wenn $\nu(N) \subseteq \mathbb{R}_+^{n-1}$ monomial ist.

***Hilfssatz* 26 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ ein Prä-Rumpf bezüglich x_i, dann gibt es genau eine Ecke γ von $N(F)$ mit γ_i maximal.*

Beweis. Da $N = N(F)$ ein Prä-Rumpf bezüglich x_i ist, ist die vertikale Projektion in die zur x_i-Achse normale Hyperebene monomial mit Ecke $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{a+1}, \ldots, a_n)$. Daher gibt es eine Ecke γ von F mit $\gamma := (a_1, \ldots, a_{i-1}, \gamma_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Angenommen α ist eine Ecke von N mit $\alpha_i > \gamma_i$. Nach Definition von γ gilt dann, dass

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) <_{\text{lex}} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

ist. Daher ist $\alpha \in \gamma + \mathbb{R}_+^n$ und damit ist α keine Ecke, im Widerspruch zur Annahme. ☺

Definition : Sei $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ ein Prä-Rumpf bezüglich x_i. Dann heißt jene Ecke von $N := N(F)$ mit maximaler x_i-Komponente der Galionspunkt von F bzw. N. Sei κ eine Ecke von N mit minimaler x_i-Komponente. Dann ist

$$\mathsf{H}(F) := \mathsf{H}(N) := \gamma_i - \kappa_i$$

die Höhe von F bzw. N.

Der zu

$$\begin{aligned} F(x, y, z) \quad = \quad & z^3 + \\ & z^2(y^3 + xy) + \\ & z(xy^3 + x^3y^2) + \\ & x^4y^5 + x^5y^2 + x^{10} \end{aligned}$$

gehörende Newton Polyeder ist ein Prä-Rumpf bezüglich z, da $\nu(N(F)) = \mathbb{R}_+^2$ ist. Die Höhe von $\nu(N(F))$ ist 3 (siehe Abbildung 38).

***Hilfssatz* 27 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ eine Potenzreihe in fixen Koordinaten. Weiters nehmen wir an, es gibt eine Gewinnstrategie für das Kaninchen für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$, Charakteristik 0, wie in der Induktionsannahme 24. Dann gibt es eine Strategie des Kaninchens, sodass nach endlichen vielen Zügen, etwa m, der zu F^m gehörende Newton Polyeder bis auf einen μ Koordinatenwechsel in $x_1, \ldots, x_n$ ein Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1} ist.*

Beweis. Betrachte F als Potenzreihe in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}[[x_{n+1}]]$, also $F \in \mathbb{F}[[x_{n+1}]][[\mathbf{x}]]$. Da $\mathbb{F}[[x_{n+1}]]$ ein Ring ist mit $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{F}[[x_{n+1}]]$, gibt es für das Kaninchen

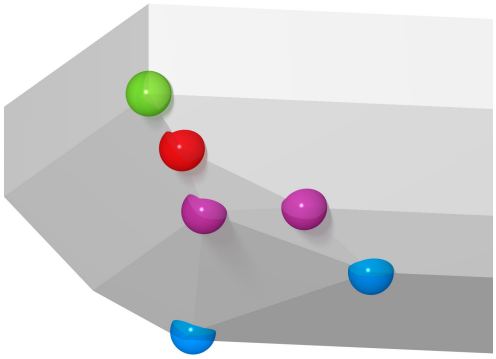


Abbildung 38: Ein Prä-Rumpf.

nach der Induktionsannahme 24 eine Gewinnstrategie. Beachte nun: Schränken wir die Möglichkeiten des Hutmachers dahingehend ein, dass er in seinem Zug nur $t_i \in \mathbb{F}$ wählen darf, statt $t_i \in \mathbb{F}[[x_{n+1}]]$, so besitzt das Kaninchen natürlich immer noch eine Gewinnstrategie. Weiters gilt: Da der Hutmacher in seinem Spielzug nur $t_i \in \mathbb{F}$ verwendet, gilt für Potenzreihen f_i eines eventuell benötigten μ-Koordinatenwechsels: $f_i \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]]$. ☺

Bemerkung: Sei $F \in \mathbb{F}[[x, y, z]]$. Betrachten wir jedoch F als Potenzreihe in den zwei Variablen x und y mit Koeffizienten in $\mathbb{F}[[z]]$, dann spielen wir sozusagen mit einem von $\mathbb{R}_+^3$ nach $\mathbb{R}_+^2$ projizierten Polyeder. Dieses Spiel ist eine Art „Mischung“ aus schwerem und leichtem Polyederspiel. Es ist nicht so einfach wie das leichte, aber auch nicht unbedingt so schwierig wie das schwere Polyederspiel. Das liegt daran, dass die Erzeuger des projizierten Polyeders möglicherweise nur „Schatten“ von Erzeugern aus „höheren Ebenen“ sind. Dazu ein Beispiel: Sei

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= y^4 z + 3xy^3 z + \\ &\quad 3x^2y^2 + x^3 y + x^8 y. \end{aligned}$$

Seien $N = N(f)$ und N^ν die Projektion von N nach $\mathbb{R}_+^2$. Beachte, dass gilt:

$$N^\nu = N\Big(\big\{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(8,1)\big\}\Big).$$

Betrachte auch das Polynom

$$\begin{aligned} g(x,y) &= y^4 + 3xy^3 + 3x^2y^2 + x^3y + x^8y \\ &= y(y+x)^3 + x^8 y. \end{aligned}$$

Der von g erzeugte Polyeder hat Höhe 3 und dieselbe Gestalt wie N^ν (siehe Abbildung 39). Betrachten wir g nach dem Spielzug $J = \{1, 2\}$ und $j = 1$ mit $t = -1$. Wir erhalten

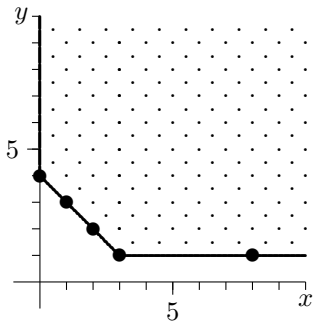


Abbildung 39: Der Polyeder N^ν.

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= g(x, xy - x) \\ &= (y-1)x^4y^3 + x^9(y-1). \end{aligned}$$

Der von g' erzeugte Polyeder hat wieder die Höhe 3 (siehe Abbildung 40). Wenden wir jedoch

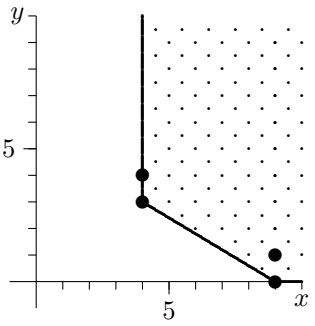


Abbildung 40 : Der Polyeder $N(g')$.

den selben Spielzug auf f an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f'(x,y,z) &= f(x, xy-x, z) \\ &= zx^4(y^4 - y^3 - 3y^2 + 5y - 2+) + \\ &\quad x^4(3y^3 - 9y^2 + 10y - 4) + x^9(y-1). \end{aligned}$$

Damit besitzt $N^\nu(f')$ die Erzeuger

$$\big\{(4,4),(4,3),(4,2),(4,1),(4,0),(9,1),(9,0)\big\}$$

und ist somit, im Gegensatz zu $N(g')$, monomial mit Ecke $(4,0)$ (siehe Abbildung 41).

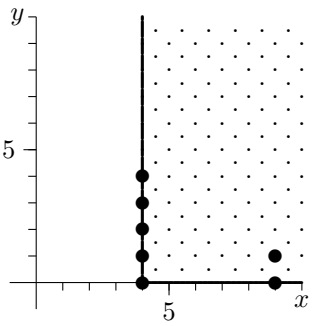


Abbildung 41 : Der Polyeder $N^\nu(f')$.

4.2.3 Höhe und Prä-Rumpf

Im vorherigen Abschnitt haben wir bereits die Höhe eines Prä-Rumpfs definiert. Bei Polyedern in $\mathbb{N}^2$ war die Höhe eine obere Schranke für die Anzahl der Ecken. Auch für spezielle Prä-Rümpfe ist dies der Fall. Im Folgenden werden wir diese charakterisieren und zeigen, dass das Kaninchen sie „erspielen“ kann.

Als Vorbereitung verallgemeinern wir den Hilfssatz 7.

***Hilfssatz* 28 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ eine monomiale Potenzreihe. Dann ist auch F', die Potenzreihe nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel, wieder monomial.*

Weiters gilt: Sei J die Wahl des Kaninchens und $j \in J$ mit $t_i \in \mathbb{F}$ für $i \in J, i \neq j$ die Wahl des Hutmachers. Ist $t_i \neq 0$ und α die Ecke von F', dann ist $\alpha_i = 0$.

Beweis. Da F eine monomiale Potenzreihe ist, gibt es ein $G \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ mit $G(0) \neq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{N}^n$, so dass

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\alpha \cdot G(\mathbf{x})$$

ist. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Spielzug gegeben durch $J = \{1, \ldots, m\}, j = 1$ und $t_i \in \mathbb{F}, t_i \neq 0$ für $2 \leq i \leq l$, mit $l \leq m$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} F'(\mathbf{x}) &= F(x_1, x_1x_2 + t_2x_1, \ldots, x_1x_l + t_lx_1, x_1x_{l+1}, \ldots, x_1x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ &= x^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{k} x_2^{\alpha_2-k} t_2^k\right) \cdots \left(\sum_{k=0}^{\alpha_l} \binom{\alpha_l}{k} x_l^{\alpha_l-k} t_l^k\right) \cdot x_{l+1}^{\alpha_{l+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \cdot G'(\mathbf{x}) \\ &= x^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} \cdot x_{l+1}^{\alpha_{l+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \cdot \widetilde{G}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Beachte, dass für

$$\widetilde{G}(\mathbf{x}) := \left(\sum_{k=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{k} x_2^{\alpha_2-k} t_2^k\right) \cdots \left(\sum_{k=0}^{\alpha_l} \binom{\alpha_l}{k} x_l^{\alpha_l-k} t_l^k\right) \cdot G'(\mathbf{x})$$

ebenfalls $\widetilde{G}(0) \neq 0$ gilt. ☺

***Hilfssatz* 29 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein Potenzreihe in fixen Koordinaten. Weiters nehmen wir an, dass F ein Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1} ist und, dass es eine Gewinnstrategie für das Kaninchen für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$, Charakteristik 0, wie in der Induktionsannahme 24 gibt. Dann gibt es eine Strategie des Kaninchens, sodass nach endlichen vielen Zügen, etwa m, der zu F^m gehörende Newton Polyeder (bis auf einen μ Koordinatenwechsel in $x_1, \ldots, x_n$) folgende Eigenschaften besitzt:*

1. *F^m ist wieder ein Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1}.*
2. *Es ist $\mathsf{H}(F^m) = \mathsf{H}(F)$.*
3. *Keine zwei Ecken von F^m haben die selbe x_{n+1} Komponente, das heißt, in jeder zur x_{n+1} Achse normalen Hyperebene liegt höchstens eine Ecke von F^m.*
4. *Sind α und δ zwei Ecken von F^m mit $\alpha_{n+1} > \delta_{n+1}$, dann ist*
$$(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \mathbb{R}_+^n.$$
5. *F^m hat höchstens $\mathsf{H}(F^m) + 1$ Ecken.*

Beweis. Sei γ der Galionspunkt von F und $\gamma_{n+1} \geq i \geq 0$. Wir zeigen die Behauptung, indem wir mit Induktion über i zeigen, dass das Kaninchen in jeder zur x_{n+1} Achse normalen Hyperebene nur eine Ecke „erspielen“ kann:

Induktionsanfang: In der Hyperebene $x_{n+1} = \gamma_{n+1}$ liegt nur eine Ecke von F, da F ein Prä-Rumpf ist.

Induktionsschritt: Angenommen F besitzt folgende Eigenschaften:

(a) In den Hyperebenen $x_{n+1} = \gamma_{n+1}, \ldots, x_{n+1} = i$ liegt jeweils höchstens eine Ecke von F.

(b) Für zwei Ecken α, δ mit $\alpha_{n+1} > \delta_{n+1} \geq i$ gilt:
$$(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \mathbb{R}_+^n.$$

(c) Sei α jene Ecke mit $\gamma_{n+1} \geq \alpha_{n+1} \geq i$ und α_{n+1} minimal und η eine Ecke mit $\alpha_{n+1} \geq i > \eta_{n+1}$. Dann gelte:
$$(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \mathbb{R}_+^n.$$

Beachte: (♠) Ist F' die Potenzreihe F nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel, wobei für die Wahl J des Kaninchens $n+1 \notin J$ gelte, dann besitzt F' wieder die Eigenschaften (a), (b) und (c). (Dies kann man leicht mit analogen Überlegungen wie im Beweis von Hilfssatz 28 zeigen.)

Schreibe

$$F = \sum_{k=i}^{\infty} x_{n+1}^k f_k + \sum_{k=0}^{i} x_{n+1}^k f_k,$$

mit $f_k \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Dann erfüllt die Potenzreihe $F_1 := \sum_{k=i}^{\infty} x_{n+1}^k f_k$ bereits alle im Hilfssatz angegebenen Eigenschaften. Betrachte die Potenzreihe $F_2 := \sum_{k=0}^{i} x_{n+1}^k f_k$ als Potenzreihe in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}[[x_{n+1}]]$. Wie im Hilfssatz 27 sieht man, dass es aufgrund der Induktionsannahme 24 eine Strategie des Kaninchens gibt, sodass für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt: F_2^m ist (bis auf einen μ Koordinatenwechsel in $x_1, \ldots, x_n$) ein Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1}. Wenden wir nun die gleichen Spielzüge auf die Potenzreihe F an (beachte, dass für jede Wahl J des Kaninchens immer $n+1 \notin J$ ist), so folgt mit der Überlegung (♠):

1. Fall: Ist F_2^m ein Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1}, dann erfüllt F^m die Eigenschaften (a), (b) und (c) für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k < i$ und der Induktionsschritt ist geglückt.

2. Fall: Es gibt Potenzreihen

$$f_1 \in \mathbb{F}[[x_2, \ldots, x_n]], f_2 \in \mathbb{F}[[x_1, x_3, \ldots, x_n]], \ldots, f_n \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n-1}]],$$

sodass $F_2^m(x_1 + f_1, \ldots, x_n + f_n)$ ein Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1} ist. Wir müssen noch überlegen, dass $F^m(x_1 + f_1, \ldots, x_n + f_n)$ ebenfalls die Eigenschaften (a), (b) und (c) erfüllt. Damit ist dann der Induktionsschritt geglückt:

Ist F_2^m wie behauptet, dann gilt: Ist $f_l \neq 0$, dann gibt es eine Ecke e von F_2^m mit $e_l = 0$. Dies sieht man wie folgt: Nach Annahme ist

$$F_2^m(x_1 + f_1, \ldots, x_n + f_n) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Wir betrachten nun

$$F_2^m = (x_1 - f_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - f_n)^{\alpha_n}.$$

Sei $f_l \neq 0$. Für $k \neq l$ schreiben wir nun

$$(x_k - f_k)^{\alpha_k} = (r_k + s_k)^{\alpha_k},$$

mit $\partial_{x_l} r_k = 0$ (kein Term von r_k enthält ein x_l) und $\partial_{x_l} s_k \neq 0$ (jeder Term von s_k enthält ein x_l). Beachte, dass immer x_k ein Term von r_k ist und damit $r_k \neq 0$. Damit folgt:

$$F_2^m = \underbrace{f_l^{\alpha_l} \cdot \prod_{k \neq l} r_k^{\alpha_k}}_{:=R} + S,$$

mit $\partial_{x_l} R = 0$ und $\partial_{x_l} S \neq 0$. Dies zeigt, dass F_2^m und damit auch F^m eine Ecke e mit $e_l = 0$ besitzt, falls $f_l \neq 0$ ist. Da aber F^m aufgrund der Überlegung (♠) die Eigenschaften (c) besitzt, gilt damit für jede Ecke α mit $\gamma_{n+1} \geq \alpha_{n+1} \geq i$ die Gleichung $\alpha_l = 0$. Damit hat der Koordinatenwechsel

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \to (x_1 + f_1, \ldots, x_n + f_n, x_{n+1})$$

keine Auswirkungen auf diese Ecken, das heißt die Potenzreihe $F^m(x_1 + f_1, \ldots, x_n + f_n, x_{n+1})$ besitzt die Eigenschaften (a), (b) und (c) und der Induktionsschritt ist geglückt.

Aus diesen Überlegungen folgen sofort die Punkte 1, 3 und 4 des Hilfssatzes. Punkt 5 ist klar mit Punkt 3. Schließlich folgt Punkt 2 aus der obigen Überlegung (♠) (es ist immer $n+1 \notin J$). ☺

Den Prä-Rümpfen aus dem vorhergehenden Hilfssatz geben wir nun einen eigenen Namen:

Definition: Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein Potenzreihe in fixen Koordinaten. Weiters sei F ein Prä-Rumpf bezüglich x_i und es gelte:

1. In jeder zur x_i Achse normalen Hyperebene liegt höchstens eine Ecke von F^m.
2. Sind α und δ zwei Ecken von F^m mit $\alpha_i > \delta_i$, dann ist

$$(\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}, \delta_{i+1}, \ldots, \delta_{n+1}) \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{n+1}) + \mathbb{R}_+^n.$$

Dann nennen wir F einen minimalen Prä-Rumpf bezüglich x_i.

4.2.4 Projektionspolyeder

Ein Prä-Rumpf hat im Allgemeinen keine große Ähnlichkeit mit einem Schiffsrumpf (siehe Abbildung 38). Doch mit Hilfe des Konzeptes „Projektionspolyeder“,der auf Hironaka zurückgeht, können wir einerseits den Begriff des Rumpfes präzise definieren und andererseits zeigen, dass das Kaninchen im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^{n+1}$, Charakteristik 0, immer einen Rumpf „erspielen“ kann, falls es ein Gewinnstrategie in $\mathbb{N}^n$ besitzt.

Ein Projektionspolyeder entsteht durch Projektion eines Polyeders bezüglich eines Punktes: Sei $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$ ein Punkt in $\mathbb{N}^{n+1}$. Um einen Punkt α mit $\alpha_{n+1} < \gamma_{n+1}$ durch γ in die zur x_{n+1} Achse normale Hyperebene zu projizieren, schneiden wir die Gerade g durch γ und α, gegeben durch

$$g : (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}) + \lambda(\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_{n+1} - \gamma_{n+1}) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{F},$$

mit der Ebene $\epsilon : x_{n+1} = 0$. Wir erhalten

$$0 = \gamma_{n+1} + \lambda(\alpha_{n+1} - \gamma_{n+1}) \text{ also } \lambda = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}}$$

und daher den Schnittpunkt S gegeben durch

$$\begin{aligned} S &= (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}) + \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}}(\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_{n+1} - \gamma_{n+1}) = \\ &= (\gamma_1 + (\alpha_1 - \gamma_1) \cdot \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}}, \ldots, \gamma_n + (\alpha_n - \gamma_n) \cdot \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}}, 0). \end{aligned}$$

Nun zur Definition des Projektionspolyeders:

Definition : Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$, $N = N(F)$ der zu F gehörende Newton Polyeder und α eine Ecke von N. Die Projektion π bezüglich x_i für einen Punkt $\delta \in \mathbb{N}^{n+1}$ mit $\delta_i < \alpha_i$ sei gegeben durch

$$\pi(\delta) := \alpha_i! \cdot \left(\delta_1^\pi, \ldots, \delta_{i-1}^\pi, \delta_{i+1}^\pi, \ldots, \delta_{n+1}^\pi\right)$$

mit

$$\delta_k^\pi := \alpha_k + \frac{(\delta_k - \alpha_k) \cdot \alpha_i}{\alpha_i - \delta_i}, \text{ für } k \neq i.$$

Es sei B die Menge jener Ecken δ von N mit $\delta_{n+1} < \alpha_{n+1}$. Dann sei $B^\pi := \pi(B) \subseteq \mathbb{N}^n$. Wir nennen den von B^π erzeugten Newton Polyeder $N^\pi := N(B^\pi) \subseteq \mathbb{R}_+^n$ den Projektionspolyeder von N zum Punkt α bezüglich x_i.

Bemerkung : Das Konzept des Projektionsployeders geht auf Hironaka zurück. Es wurde auch schon mehrmals in anderen Arbeiten verwendet. So taucht es zum Beispiel bei der Lösung des leichten Polyederspiels von Spivakovsky auf (siehe Bemerkung 3 bzw. [22]), oder in einer Arbeit von Hauser, siehe [11], Seite 364.

Ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= z^3 + \\ &\quad z^2(y^3 + xy) + \\ &\quad z(xy^3 + x^3y^2) + \\ &\quad x^4y^5 + x^5y^2 + x^{10}, \end{aligned}$$

dann wird der Projektionspolyeder erzeugt von (siehe Abbildung 42, dargestellt ist der um 3! gestauchte Projektionspolyeder):

$$3! \cdot \left\{ \begin{array}{l} (9,0), (3,3), \\ (\frac{3}{2}, \frac{9}{2}), (\frac{9}{2}, 3), \\ (4,5), (5,2), (10,0) \end{array} \right\}$$

Mit Hilfe des Projektionspolyeders kann der Begriff Rumpf präzise definiert werden.

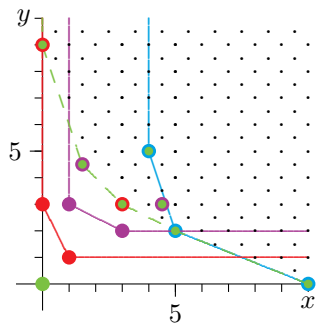


Abbildung 42 : Der um 3! gestauchte Projektionspolyeder von F wird von den zweifarbigen Punkten erzeugt.

Definition : Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$, $N = N(F)$ der zu F gehörende Newton Polyeder. Weiters sei F ein minimaler Prä-Rumpf bezüglich x_i und $\alpha^0, \ldots, \alpha^m$ die Ecken von F mit $\alpha_i^k < \alpha_i^l$ für $k < l$. Wir sagen N bzw. F besitzt Rumpfgestalt bzw. ist ein Rumpf bezüglich x_i, wenn für jedes $k, 0 \leq k \leq m$ der Projektionspolyeder von F zur Ecke α^k bezüglich x_i monomial ist.

Als Beispiel eines Rumpfes betrachte die Potenzreihe

$$\begin{aligned} F(x,y,z) \quad = \quad & z^3 + \\ & z^2x^2y^3 + \\ & z(x^6y^{10} + x^5y^7) + \\ & x^{10}y^{16} + x^{16}y^{20}. \end{aligned}$$

Abbildung 43 zeigt, dass der Newton Polyeder von F tatsächlich einem Schiffsrumpf ähnelt. Ein paar Rechnungen zeigen, dass F tatsächlich ein Rumpf ist: Der Projektionspolyeder von

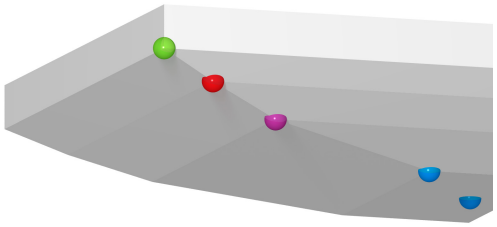


Abbildung 43 : Ein Rumpf.

N bezüglich $(0,0,3)$ wird von der Menge $3! \cdot \{(6,9),(7.5,10.5),(10,16)\}$ erzeugt und ist somit monomial mit Ecke $3! \cdot (6,9)$. Der Projektionspolyeder von N bezüglich $(2,3,2)$ wird von der Menge $2! \cdot \{(8,11),(10,16)\}$ erzeugt und ist somit monomial mit Ecke $2! \cdot (8,11)$. Und schließlich wird der Projektionspolyeder von N bezüglich $(5,7,1)$ von der Menge $\{(10,16)\}$ erzeugt und ist somit ebenfalls monomial.

***Hilfssatz* 30 :** *Sei N ein Rumpf bezüglich x_i. Dann gilt:*

1. *Jede zur x_i Achse normale Ebene enthält höchstens eine Ecke von N.*

2. *Es gibt genau eine Ecke γ, so dass γ_i maximal ist.*

3. *Hat N mindestens zwei Ecken, dann gibt es genau ein Ecke γ mit γ_i maximal und genau eine Ecke $\beta \neq \gamma$, so dass $\gamma_i - \beta_i \neq 0$ minimal ist.*

4. *Es gibt genau eine Ecke κ, so dass κ_i minimal ist.*

Beweis. Die Punkte 1, 2, 3 und 4 folgen direkt aus der Definition. ☺

Definition: Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]], N = N(F)$ ein Rumpf bezüglich x_i.

1. Die Ecke $\gamma = \gamma(N) = \gamma(F)$ mit γ_i maximal nennen wir Galionspunkt.

2. Hat N mindestens zwei Ecken und ist γ der Galionspunkt, dann heißt jene Ecke $\beta \neq \gamma$ mit $\gamma_i - \beta_i$ minimal Bugpunkt.

3. Die Ecke $\kappa = \kappa(N) = \kappa(F)$ mit κ_i minimal nennen wir Kielpunkt.

4. Seien γ und κ wie eben definiert, dann heißt

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}(N) = \mathsf{H}(F) := \gamma_i - \kappa_i$$

die Höhe des Rumpfes F bzw. N (bezüglich x_i).

Bemerkung: Jeder Rumpf N ist auch ein minimaler Prä-Rumpf. Die Höhe von N als Prä-Rumpf stimmt mit der Höhe von N als Rumpf überein.

Wie oben gezeigt, besitzt das Kaninchen eine Strategie um im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^{n+1}$, Charakteristik 0, aus einem beliebigen Polyeder einen minimalen Prä-Rumpf zu machen, falls es eine Gewinnstrategie in $\mathbb{N}^n$ besitzt. Der folgende Hilfssatz zeigt, dass es auch eine Strategie besitzt, um aus einem minimalen Prä-Rumpf einen Rumpf zu machen. Davor noch ein Beispiel: Sei $F(x, y, z) \in \mathbb{F}[[x, y, z]]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= z^3 + \\ &\quad z^2xy + \\ &\quad z(x^2y^4 + x^3y^2) + \\ &\quad x^4y^6 + x^{12}y^4. \end{aligned}$$

Damit ist F ein Prä-Rumpf bezüglich z (aber kein minimaler Prä-Rumpf). Der Projekionspolyeder bezüglich $(0, 0, 3)$ ist bereits monomial (siehe Abbildung 44) mit Ecke $3! \cdot (3, 3)$, nicht jedoch der Projektionspolyeder bezüglich $(1, 1, 2)$ (siehe Abbildung 45). Für den Spielzug $J = \{1, 2\}, j = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F^1(x,y,z) &= z^3 + \\ &\quad z^2x^2y + \\ &\quad z(x^6y^4 + x^5y^2) + \\ &\quad x^{10}y^6 + x^{16}y^4. \end{aligned}$$

Jetzt ist auch der Projektionspolyeder bezüglich $(2, 1, 2)$ monomial (mit Ecke $2! \cdot (8, 3)$, die von der Ecke $(5, 2, 1)$ erzeugt wird, siehe Abbildung 46). Der Projektionspolyeder bezüglich $(0, 0, 3)$ ist natürlich nach wie vor monomial. Nur der Projektionspolyeder bezüglich $(5, 2, 1)$ ist noch nicht monomial. Nach einem weiteren Spielzug mit $J = \{1, 2\}, j = 2$ ist:

$$\begin{aligned} F^2(x,y,z) &= z^3 + \\ &\quad z^2x^2y^3 + \\ &\quad z(x^6y^{10} + x^5y^7) + \\ &\quad x^{10}y^{16} + x^{16}y^{20}. \end{aligned}$$

Nun sind die Projektionspolyeder bezüglich $(0, 0, 3), (2, 3, 2)$ und $(5, 7, 1)$ monomial (siehe Abbildung 47). Daher besitzt auch $N^2 = N(F^2)$ keine kompakte Facette mehr.

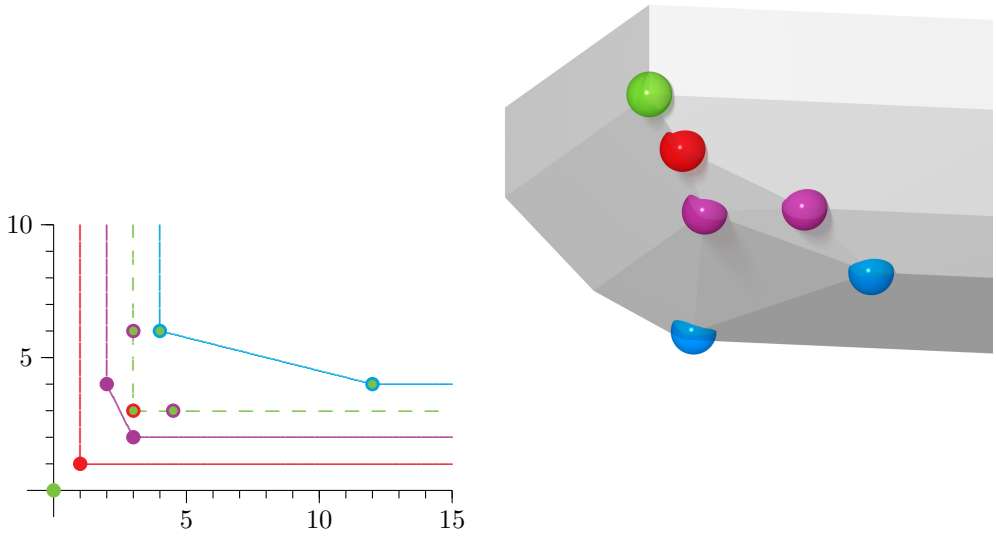


Abbildung 44: Die Projektion (um 3! gestaucht) bezüglich $(0, 0, 3)$ (grün gestrichelt) ist monomial.

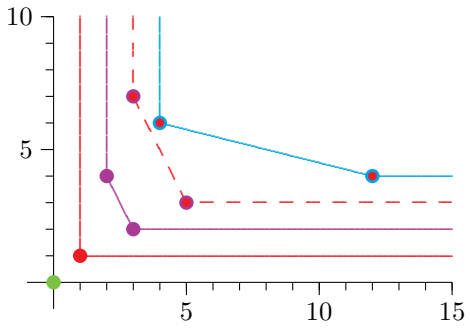


Abbildung 45: Die Projektion (um 2! gestaucht) bezüglich $(1, 1, 2)$ (rot gestrichelt) ist nicht monomial.

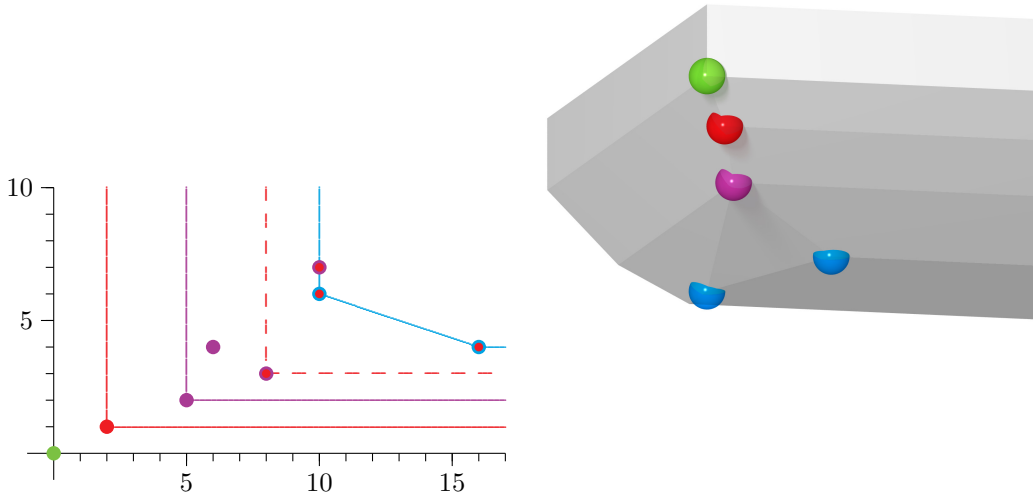


Abbildung 46: Die Projektion (um 2! gestaucht) bezüglich $(2, 1, 2)$ (rot gestrichelt) ist nun auch monomial.

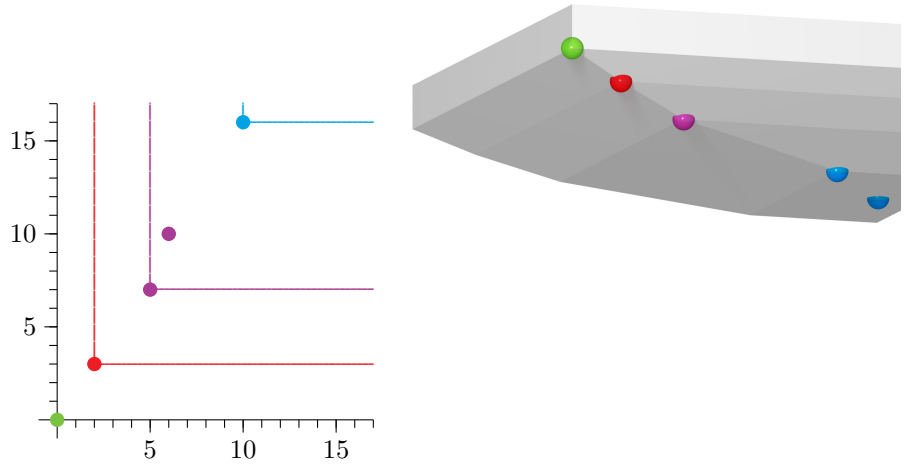


Abbildung 47: Alle Projektionspolyeder sind monomial.

Um nun zu zeigen, dass das Kaninchen eine Strategie besitzt, um einen Rumpf zu „erspielen“, gehen wir wie folgt vor: Wir geben eine Funktion inv an, die jedem minimalen Prä-Rumpf G einen von den Koordinaten unabhängigen Wert $\mathsf{inv}(G) \in \mathbb{N}^5$ zuordnet. Weiters zeigen wir: Ist $(F^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine durch eine Folge von Spielzügen entstandene Folge von minimalen Prä-Rümpfen, dann ist $\mathsf{inv}(F^{k+1}) <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(F^k)$, solange bis F^{k+1} ein Rumpf ist.

Als Vorbereitung definieren wir eine von Koordinaten abhängige Funktion b. Anschließend definieren wir mit der der Hilfe von b eine von Koordinaten unabhängige Funktion inv.

Definition des von Koordinaten abhängigen Wertes b: Sei G ein minimaler Prä-Rumpf. Wir definieren

$$b(G) := \big(b_1(G), b_2(G), b_3(G), b_4(G), b_5(G)\big) \in \mathbb{N}^5$$

wie folgt:

$b_1(G)$: Wir setzen $b_1(G) := \mathsf{H}(G)$.

$b_2(G)$: Da G ein minimaler Prä-Rumpf ist, liegt in jeder zur x_{n+1} Achse normalen Hyperebene nur eine Ecke von $N(F)$. Sei nun

$$E = \{\alpha^1, \dots, \alpha^e\}$$

die Menge der Ecken von N mit $\alpha^k_{n+1} > \alpha^l_{n+1}$ für $k > l$. Dann ist $\alpha^e = \gamma$ der Galionspunkt. Seien weiters $P_e(G), \dots, P_1(G)$ die Projektionspolyeder zu den Ecken $\alpha^e, \dots, \alpha^1$ bezüglich x_{n+1}. Sind die Projektionspolyeder $P_e(G), \dots, P_{k-1}(G)$ monomial, $P_k(G)$ nicht monomial, dann sei

$$\eta(G) := \alpha^k$$

die Projektionsecke von G. (Besitzt G keine Projektionsecke, so sei $\eta := \kappa$, wobei κ der Kielpunkt von G ist.) Wir setzen (mit κ dem Kielpunkt von G):

$$b_2(G) := \eta_{n+1} - \kappa_{n+1}.$$

$b_3(G)$: Sei η die Projektionsecke von G und $P_\eta(G)$ der Projektionspolyeder von G zu η bezüglich x_{n+1}. Sei weiters E die Menge der Ecken von $P_\eta(G)$, dann setzen wir:

$$b_3(G) := \#E.$$

(Wenn $\eta = \kappa$ ist, ist $P_\eta(G) = \emptyset$ und wir setzen $b_3(G) := 0$.)

$b_4(G)$: Sei η die Projektionsecke von G und $P_\eta(G)$ der Projektionspolyeder von G zu η bezüglich x_{n+1}. Sei weiters E die Menge der Ecken von $P_\eta(G)$. Betrachte nun die Menge V aller Vektoren zwischen den Ecken von $P_\eta(G)$:

$$V := \{a - b \ : \ a, b \in E\}.$$

Sei weiters $v_E \in V$ so, dass $\big(\mathsf{L}(v_E), n-\mathsf{V}(v_E)\big)$ minimal ist (L und V wie beim Vektorspiel, siehe Abschnitt 2.1), das heißt, es gilt für alle $w \in V$:

$$\big(\mathsf{L}(v_E), n-\mathsf{V}(v_E)\big) \leq_{\text{lex}} \big(\mathsf{L}(w), n-\mathsf{V}(w)\big).$$

Nun setzen wir

$$b_4(G) := \mathsf{L}(v_E).$$

(Wenn $\eta = \kappa$ ist, ist $P_\eta(G) = \emptyset$ und damit gibt es keinen Vektor v_E. Dann setzen wir $b_4(G) := 0$.)

$b_5(G)$: Sei v_E wie oben, dann setzen wir

$$b_5(G) := n - \mathsf{V}(v_E).$$

(Wenn $\eta = \kappa$ ist, ist $P_\eta(G) = \emptyset$ und damit gibt es keinen Vektor v_E. Dann setzen wir $b_5(G) := 0$.)

Beachte: Das Tripppel $\big(b_3(G), b_4(G), b_5(G)\big)$ entspricht dem Tripppel, das dem Polyeder $P_\eta(G)$ bei der Lösung des leichten Polyederspiels zugeordnet wird (siehe Abschnitt 2.2). Weiters gilt: Ist $b(G) = (\mathsf{H}, 0, 0, 0, 0)$, dann ist G ein Rumpf.

Definition des von Koordinaten unabhängigen Wertes inv: Sei F ein minimaler Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1} und W_F die Menge aller Potenzreihen, sodass gilt: Ist $G \in W_F$, so ist G ein minimaler Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1} und es gibt einen μ Koordinatenwechsel φ mit $G = \varphi(F)$. Weiters sei $I_F^1 \subseteq W_F$ jene Menge, für die gilt: Ist $G \in I_F^1$, dann gilt für alle $H \in W_F$:

$$b(G) \leq_{\text{lex}} b(H).$$

(Klarerweise ist $I_F^1 \neq \emptyset$.) Nun setzen wir

$$\mathsf{inv}(F) := b(G) \text{ mit } G \in I_F^1.$$

***Hilfssatz* 31 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ eine Potenzreihe in fixen Koordinaten. Weiters sei F ein minimaler Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1}. Dann gibt es eine Strategie des Kaninchens, sodass nach endlich vielen Zügen, etwa m, im schweren Polyederspiel, Charakteristik 0, die Potenzreihe F^m (bis auf einen μ Koordinatenwechsel in $x_1, \ldots, x_n$) ein Rumpf bezüglich x_{n+1} ist. Weiters gilt: $\mathsf{H}(F) = \mathsf{H}(F^m)$.*

Beweis. Wir geben zuerst die Wahl J des Kaninchens an und zeigen dann für jede Wahl des Hutmachers: Ist F' die Potenzreihe nach einem Spielzug, dann ist F' wieder ein minimaler Prä-Rumpf und es gilt:

$$\mathsf{inv}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(F).$$

Dann folgt die Behauptung des Hilfssatzes, da $\mathbb{N}^5$ mit $<_{\text{lex}}$ wohlgeordnet ist und damit die Folge $(\mathsf{inv}(F^m))_{m\in\mathbb{N}}$ stationär werden muss.

Wahl des Kaninchens: Sei η die Projektionsecke von F und $P_\eta(F)$ der Projektionspolyeder von F zu η bezüglich x_{n+1}. Die Wahl des Kaninchens entspricht nun der Wahl, die es im leichten Polyederspiel trifft (siehe Abschnitt 2.2). Genauer: Sei E die Menge der Ecken von $P_\eta(F)$. Betrachte nun die Menge V aller Vektoren zwischen den Ecken von $P_\eta(G)$:

$$V := \{a - b \ : \ a, b \in E\}.$$

Sei weiters $v_E \in V$ so, dass $\big(\mathsf{L}(v_E), n-\mathsf{V}(v_E)\big)$ minimal ist (L und V wie beim Vektorspiel, siehe Abschnitt 2.1), das heißt, es gilt für alle $w \in V$:

$$\big(\mathsf{L}(v_E), n-\mathsf{V}(v_E)\big) \leq_{\text{lex}} \big(\mathsf{L}(w), n-\mathsf{V}(w)\big).$$

Wie im Vektorspiel seien nun $k := k(E) := k(v_E)$ und $l := l(E) := l(v_E)$ so, dass gilt:

$$v_{Ek} = \min_{1\leq i\leq n} v_{Ei} \text{ und } v_{El} = \max_{1\leq i\leq n} v_{Ei}.$$

Dann wähle das Kaninchen

$$J = \{k, l\}.$$

(Beachte: Es ist $n+1 \notin J$, damit ist $\kappa(F') = \kappa(F), \gamma(F') = \gamma(F)$ und damit $\mathsf{H}(F') = \mathsf{H}(F)$.)

Es ist $\mathsf{inv}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(F)$: Sei nun $j \in J, t \in \mathbb{F}$ die Wahl den Hutmachers und F' die Potenzreihe nach dem Spielzug.

Ist $t = 0$, so ist klarerweise F' wieder ein minimaler Prä-Rumpf. Die Behauptung folgt wie im Beweis von Satz 2. Genauer: Betrachte den Polyeder $P_\eta(F)$ und den Polyeder $P_\eta(F)'$ nach dem Spielzug mit J und j. Wie im Beweis von Satz 2 zeigt man, dass gilt:

1. $P_\eta(F)'$ ist monomial. Dann ist $\eta(F')_{n+1} < \eta(F)_{n+1}$ und damit

   $$\eta(F')_{n+1} - \kappa(F')_{n+1} = \eta(F')_{n+1} - \kappa(F)_{n+1} < \eta(F)_{n+1} - \kappa(F)_{n+1}.$$

   Daraus folgt $\mathsf{inv}(F') \leq \mathsf{inv}(F)$.

2. Ist $P_\eta(F)'$ nicht monomial, gilt (siehe Beweis von Satz 2): Ist E' die Menge der Ecken von $P_\eta(F)'$, dann ist

   $$\big(\#E', \mathsf{L}(v_{E'}), n - \mathsf{V}(v_{E'})\big) <_{\text{lex}} \big(\#E, \mathsf{L}(v_E), n - \mathsf{V}(v_E)\big).$$

   Daraus folgt wieder $\mathsf{inv}(F') \leq \mathsf{inv}(F)$.

Seit nun $t \neq 0$. Wir betrachten, wie sich eine Ecke von F unter dem Spielzug verhält. Sei dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit $J = \{1, 2\}$ und $t = 1$. Eine Ecke von F besitzt die Form

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}).$$

Da F ein minimaler Prä-Rumpf ist, geht die Ecke über in eine Ecke von F' (vergleiche auch mit Hilfssatz 28) von der Form:

$$(\alpha_1 + \alpha_2, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}).$$

Daher ist F' wieder ein minimaler Prä-Rumpf. Dass $\mathsf{inv}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(F)$ ist, zeigt man nun wie beim Fall $t = 0$. Beachte dabei: Sind α, δ Ecken von F mit $v_E = \alpha - \delta$ und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_1 - \delta_1$ das Minimum der Komponenten von v_E bzw. $\alpha_2 - \delta_2$ das Maximum, dann gilt nach dem Spielzug:

$$\alpha_1' - \delta_1' = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta_1 - \delta_2.$$

Dieser Wert ist echt größer als der Wert der kleinsten Komponente von $v_{E'}$ (siehe den Beweis von Satz 2). Anders als beim Spielzug mit $t = 0$ ist aber $\alpha_2' - \delta_2' (= 0)$ nicht gleich dem Wert der größten Komponente von $v_{E'}$. Damit ist das Maximum der Komponenten von $v_{E'}$ kleiner oder gleich dem Maximum der Komponenten von v_E. Das heißt: Im Sinne des Vektorspiels ist der Vektor $v_{E'}$ „kleiner“ bei der Wahl $t \neq 0$ des Hutmachers als bei der Wahl $t = 0$. ☺

4.3 Lösung des schweren Polyederspiels in $\mathbb{N}^n$, Charakteristik 0 / Induktionsschritt

Bevor wir nun zeigen, wie das Kaninchen spielen muss, um einen gegebenen Rumpf in einen Rumpf mit kleinerer Höhe umzuwandeln, machen wir noch einige Definitionen.

4.3.1 Länge und Steigung

Beim schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ tauchten die Begriffe „anliegend“ sowie „Länge“ und „Steigung“ auf. Diese sollen nun im Folgenden für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$ verallgemeinert werden.

Definition: Sei $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$. Dann heißt F bzw. $N(F)$ anliegend (bezüglich x_i), wenn $\mathrm{ord}_{x_i}(F) = 0$ ist. Ist $\mathrm{ord}_{x_i}(F) \neq 0$, so heißt F bzw. $N(F)$ nicht anliegend (bezüglich x_i).

Definition: Sei $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ eine Potenzreihe in fixen Koordinaten und $N = N(F)$ der zu F gehörende Newton Polyeder. Dann ist F bzw. N ein Schiefrumpf bezüglich x_i, wenn gilt:

1. In jeder zur x_i Achse normalen Ebene liegt höchstens eine Ecke von N.

2. Sei $E = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$ die Menge der Ecken von N mit $\alpha_i^k > \alpha_i^l$ für $k > l$. Dann sind die Projektionspolyeder P_i zu den Ecken $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ bezüglich x_i monomial.

Ist F ein Schiefrumpf, aber kein Rumpf, dann heißt F ein echter Schiefrumpf.

Zum Beispiel ist der durch

$$F(x, y, z) = y^3z^3 + xy^2z^2 + x^3yz + x^6y^4$$

gegebene Newton Polyeder ein echter Schiefrumpf (siehe Abbildung 48).

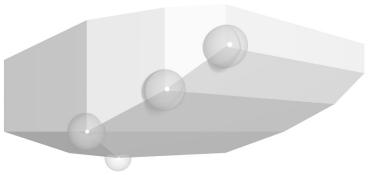


Abbildung 48 : Ein echter Schiefrumpf.

Definition : Sei $F \in \mathbb{F}[[\mathbf{x}]]$ ein Schiefrumpf bezüglich x_i und $E = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$ die Menge der Ecken von N mit $\alpha_i^k > \alpha_i^l$ für $k > l$. Dann heißt $\gamma(N) := \alpha^m$ der Galionspunkt von N, $\beta(N) := \alpha^{m-1}$ der Bugpunkt von N und $\kappa(N) := \alpha^1$ der Kielpunkt von N. Die Höhe H von F bzw. N ist definiert durch $\mathsf{H}(N) := \gamma_i - \kappa_i$.

Bemerkung : Ist F ein Rumpf, dann ist F auch ein Schiefrumpf. Die Höhe von F als Rumpf stimmt mit der Höhe von F als Schiefrumpf überein.

Definition : Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein Schiefrumpf bezüglich x_i und $N := N(F)$ der zu F gehöhrende Newton Polyeder. Weiters seien γ und β Galions- und Bugpunkt von F bzw. N. Wir definieren Länge L und Steigung Stg:

1. Es ist
$$\mathsf{L}(F) := \gamma_i - \beta_i.$$

2. Die Steigung von F ist ein Element aus $\mathbb{N}^4$ und hängt vom Vektor
$$v_\beta = (v_{\beta 1}, \ldots, v_{\beta n}) := (\beta_1 - \gamma_1, \ldots, \beta_{i-1} - \gamma_{i-1}, \beta_{i+1} - \gamma_{i+1}, \ldots, \beta_{n+1} - \gamma_{n+1})$$
ab. Diesen nenne wir Bugvektor. (Beachte: Es gilt immer $v_\beta \notin -\mathbb{N}^n$. Ist F ein Rumpf, dann ist $v_\beta \in \mathbb{N}^n$. Ist hingegen F ein echter Schiefrumpf, dann ist $v_\beta \notin \mathbb{N}^n$.) Wir setzen:

$$\begin{array}{lcll}
\mathsf{Stg}_1 & := & \max\limits_{1\le k\le n} v_{\beta k}, & \\
\mathsf{Stg}_2 & := & n - \#\{k \,:\, v_{\beta k} < \mathsf{Stg}_1\}, & \\
\mathsf{Stg}_3 & := & \begin{cases} \max_{1\le k\le n} v_{\beta k} - \min_{1\le k\le n} v_{\beta k} & \text{für } v_\beta \notin \mathbb{N}^n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} & \\
\mathsf{Stg}_4 & := & \begin{cases} n - \#\{l \,:\, \max_{1\le k\le n} v_{\beta k} < v_{\beta l} < \min_{1\le k\le n} v_{\beta k}\} & \text{für } v_\beta \notin \mathbb{N}^n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} &
\end{array}$$

(Beachte: Ist $v_\beta \notin \mathbb{N}^n$, dann ist $\mathsf{Stg}_3 = \mathsf{L}(v_\beta)$ die Länge des Vektors v_β aus dem Vektorspiel und ebenso $\mathsf{Stg}_4 = n - \mathsf{V}(v_\beta)$ wie im Vektorspiel.)

4.3.2 Nicht anliegende Schiefrümpfe

Wir gehen nun von einem nicht anliegenden Schiefrumpf F aus und geben eine Wahl des Kaninchens an. Dann zeigen wir: Ist $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der aus dem Spiel resultierenden Schiefrümpfe (für die angegebene Strategie des Kaninchens und eine beliebige Strategie des Hutmachers) und ist F^m nicht anliegend für alle $m \in \mathbb{N}$, dann gewinnt das Kaninchen.

Um dies zu zeigen, geben wir eine Funktion inv^{na} an, die jedem Schiefrumpf G einen von den Koordinaten unabhängigen Wert $\mathsf{inv}^{na}(G) \in \mathbb{N}^6$ zuordnet. Dann zeigen wir: Ist $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der nicht anliegenden Schiefrümpfe, dann ist solange $\mathsf{inv}^{na}(F^{m+1}) <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F^m)$, bis F^{m+1} monomial ist.

Definition: Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1,\dots,x_{n+1}]]$ ein Schiefrumpf bezüglich x_{n+1} und $N := N(F)$ der zu F gehöhrende Newton Polyeder. Wir definieren inv^{na}: Sei dazu W_F die Menge aller Potenzreihen, sodass gilt: Ist $G \in W_F$, so ist G ein Schiefrumpf bezüglich x_{n+1} und es gibt einen μ Koordinatenwechsel φ mit $G = \varphi(F)$. Weiters sei $I_F^{na} \subseteq W_F$ jene Menge, für die gilt: Ist $G \in I_F^{na}$, dann gilt für alle $H \in W_F$:

$$\big(\mathsf{H}(G),\mathsf{L}(G),\mathsf{Stg}(G)\big) \leq_{\text{lex}} \big(\mathsf{H}(H),\mathsf{L}(H),\mathsf{Stg}(H)\big).$$

(Klarerweise ist $I_F^{na} \neq \emptyset$.) Nun setzen wir

$$\mathsf{inv}^{na}(F) := \big(\mathsf{H}(G),\mathsf{L}(G),\mathsf{Stg}(G)\big) \text{ mit } G \in I_F^{na}.$$

Ist F ein Schiefrumpf und v_β sein Bugvektor, so unterscheiden wir im Folgenden die vier Fälle:

1. Es ist $v_\beta \in \mathbb{N}^n$ (also ist F ein Rumpf) und es gilt: Ist w eine maximale Komponente von v_β, so ist
$$w > \mathsf{L}(F).$$
2. Es ist wieder $v_\beta \in \mathbb{N}^n$ (also ist F ein Rumpf) und es gilt: Ist w eine maximale Komponente von v_β, so ist
$$w < \mathsf{L}(F).$$
3. Es ist $v_\beta \notin \mathbb{N}^n$ (also ist F ein echter Schiefrumpf).
4. Es ist $v_\beta \in \mathbb{N}^n$ (also ist F ein Rumpf) und es gilt: Ist w eine maximale Komponente von v_β, so ist
$$w = \mathsf{L}(F).$$
Dies ist der kritische Fall.

***Hilfssatz* 32:** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1,\dots,x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) nicht anliegender Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Weiters sei v_β der Bugvektor von F und w eine maximale Komponente von v_β. Ist*

$$w > \mathsf{L}(F),$$

dann gibt es eine Strategie das Kaninchens, sodass für F', die Potenzreihe nach dem Spielzug, gilt: F' ist ein nicht anliegender Schiefrumpf und es ist

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $F \in I_F^{na}$ ist. Es ist

$$F(x_1,\dots,x_{n+1}) = c_\gamma x_1^{\gamma_1}\cdots x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + c_\beta x_1^{\beta_1}\cdots z_{n+1}^{\beta_{n+1}} + G(x,y,z),$$

wobei γ der Galionspunkt bzw. β der Bugpunkt von F ist. Daher ist $\gamma_{n+1} > \beta_{n+1}$. Damit ist

$$v_\beta = (v_1,\dots,v_n) = (\beta_1-\gamma_1,\dots,\beta_n-\gamma_n).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei v_1 eine maximale Komponente von v_β, also

$$w := v_1 \geq v_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$w = v_1 = \beta_1 - \gamma_1 > \mathsf{L}(F) = \gamma_{n+1} - \beta_{n+1}.$$

Beachte, dass für eine Ecke $\alpha \neq \gamma$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} > \beta_{n+1} \geq \alpha_{n+1}, \\ \gamma_1 < \beta_1 \leq \alpha_1, \\ \gamma_i \leq \beta_i \leq \alpha_i \qquad \text{für } 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Daher folgt insgesamt:

$$\alpha_1 + \alpha_{n+1} \geq \beta_1 + \beta_{n+1} > \gamma_1 + \gamma_{n+1}.$$

Das Kaninchen spiele nun $J = \{1, n+1\}$. (Beachte, dass 1 der Index von v_i ist, mit v_i eine maximale Komponente.) Wir unterscheiden je nach Antwort des Hutmachers drei Fälle.

Fall 1: Antwortet der Hutmacher mit $j = 1$ und $t \neq 0$, so ist

$$\begin{aligned} F'(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= c_\gamma x_1^{\gamma_1+\gamma_{n+1}} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n} (x_{n+1} + t)^{\gamma_{n+1}} + \\ &\quad c_\beta x_1^{\beta_1+\beta_{n+1}} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n} (x_{n+1} + t)^{\beta_{n+1}} + \\ &\quad G(x_1, \ldots, x_1 x_{n+1} + t x_1). \end{aligned}$$

Dies ist, da für jede Ecke $\alpha \neq \gamma$ die Ungleichung $\gamma_1 + \gamma_{n+1} < \alpha_1 + \alpha_{n+1}$ gilt, ein monomialer Polyeder mit der Ecke $(\gamma_1 + \gamma_{n+1}, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, 0)$ und wir sind fertig. Analog ist F' für $j = n+1$ und $t \neq 0$ ein monomialer Polyeder mit Ecke $(0, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma_1 + \gamma_{n+1})$.

Fall 2: Sei nun $j = n+1$ und $t = 0$. Dann erhalten wir aus γ, β und einer weiteren Ecke α die neuen Ecken

$$\begin{aligned} \gamma' &= (\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_1 + \gamma_{n+1}), \\ \beta' &= (\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_1 + \beta_{n+1}), \\ \alpha' &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1 + \alpha_{n+1}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzungen ist

$$\gamma_1 + \gamma_{n+1} < \beta_1 + \beta_{n+1} \leq \alpha_1 + \alpha_{n+1}.$$

Daher ist F' für $j = 3$ und $t = 0$ ein monomialer Polyeder mit Ecke $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_1 + \gamma_{n+1})$.

Fall 3: Sei schließlich $j = 1$ und $t = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} F'(x, y, z) &= c_\gamma x_1^{\gamma_1+\gamma_{n+1}} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n} x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + \\ &\quad c_\beta x_1^{\beta_1+\beta_{n+1}} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n} x_{n+1}^{\beta_{n+1}} + \\ &\quad G(x_1, \ldots, x_n, x_1 x_{n+1}). \end{aligned}$$

Damit ist F' wieder ein Rumpf mit $\mathsf{H}(F') = \mathsf{H}(F)$ und $\gamma(F') = \gamma' = (\gamma_1 + \gamma_{n+1}, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1})$, sowie $\beta(F') = \beta' = (\beta_1 + \beta_{n+1}, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1})$. Doch es gilt:

$$\beta'_1 - \gamma'_1 = \beta_1 + \beta_{n+1} - \gamma_1 + \gamma_{n+1} = \beta_1 - \gamma_1 + \underbrace{\beta_{n+1} - \gamma_{n+1}}_{<0} < \beta_1 - \gamma_1 = \mathsf{Stg}_1(F).$$

Damit gilt entweder

$$\mathsf{Stg}_1(F') < \mathsf{Stg}_1(F),$$

oder es ist $\mathsf{Stg}_1(F') = \mathsf{Stg}_1(F)$ und

$$\mathsf{Stg}_2(F') < \mathsf{Stg}_2(F).$$

Daher ist

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

Beachte weiters, dass F' bezüglich x_{n+1} nicht anliegend ist. ☺

***Hilfssatz* 33 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) nicht anliegender Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Weiters sei v_β der Bugvektor von F und w eine maximale Komponente von v_β. Ist*

$$w < \mathsf{L}(F),$$

dann gibt es eine Strategie das Kaninchens, sodass für F', die Potenzreihe nach dem Spielzug, gilt: F' ist (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ein Schiefrumpf und es ist

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $F \in I_F^{na}$ ist. Es ist

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c_\gamma x_1^{\gamma_1} \cdots x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + c_\beta x_1^{\beta_1} \cdots z_{n+1}^{\beta_{n+1}} + G(x, y, z),$$

wobei γ der Galionspunkt bzw. β der Bugpunkt von F ist. Daher ist $\gamma_{n+1} > \beta_{n+1}$. Damit ist

$$v_\beta = (v_1, \ldots, v_n) = (\beta_1 - \gamma_1, \ldots, \beta_n - \gamma_n).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei v_1 eine maximale Komponente von v_β, also

$$w := v_1 \geq v_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Nach Voraussetzung gilt damit für $2 \leq i \leq n$:

$$v_i \leq w = v_1 = \beta_1 - \gamma_1 < \mathsf{L}(F) = \gamma_{n+1} - \beta_{n+1}.$$

(Zur Veranschaulichung siehe Abbildung 49).

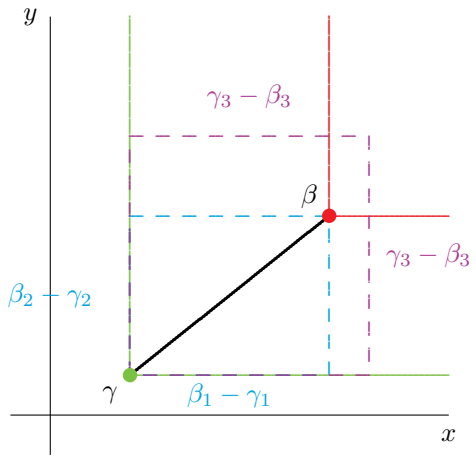


Abbildung 49 : Aufsicht eines Schiefrumpfes von Hilfssatz 33.

Das Kaninchen spiele nun $J = \{1, n+1\}$. (Achtung: Es ist wesentlich in dieser Situation $J = \{1, n+1\}$ zu wählen, da nach Annahme $\beta_1 - \gamma_1 \geq \beta_i - \gamma_i$ ist für $2 \leq i \leq n$.) Wir unterscheiden je nach Antwort des Hutmachers zwei Fälle.

Fall 1: Der Hutmacher antwortet mit $j = 1$ und $t \neq 0$ (analoge Überlegungen mit $j = n+1, t \neq 0$). Daher ist

$$\begin{aligned} F'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) &= F(x_1, \ldots, x_n, x_1 x_{n+1} + t x_1) \\ &= c_\gamma x_1^{\gamma_1 + \gamma_{n+1}} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n} (x_{n+1} + t)^{\gamma_{n+1}} + \\ &\quad c_\beta x_1^{\beta_1 + \beta_{n+1}} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n} (x_{n+1} + t)^{\beta_{n+1}} \\ &\quad + G(x_1, \ldots, x_n, x_1 x_{n+1} + t x_1). \end{aligned}$$

Fall 1a: Gibt es ein $i, 2 \leq i \leq n$ mit $v_i \neq 0$, dann ist F' ein bezüglich x_1 nicht anliegender Rumpf mit dem Galionspunkt $\gamma' = (\gamma_1 + \gamma_{n+1}, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, 0)$ (siehe Abbildung 50). Für die Höhe von

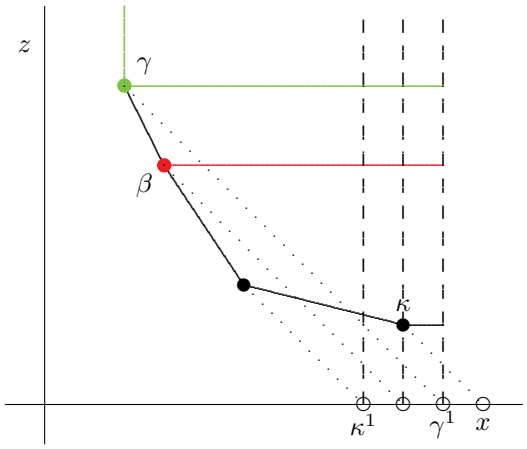


Abbildung 50 : Seitenansicht eines Polyeders im Fall 1 von Hilfssatz 33.

F' gilt: Es gibt eine Ecke α von F, so dass für den Kielpunkt κ' von F' gilt:

$$\kappa' = \kappa(F') = (\alpha_1 + \alpha_{n+1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0).$$

Für α gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \gamma_1 < \alpha_1 &\leq \kappa_1, \\ \gamma_i \leq \alpha_i &\leq \kappa_i, \qquad \text{für } 2 \leq i \leq n, \\ \gamma_{n+1} > \alpha_{n+1} &\geq \kappa_{n+1}. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\mathsf{H}(F') = \gamma_1 + \gamma_{n+1} - (\alpha_1 + \alpha_{n+1}) = \gamma_{n+1} - \alpha_{n+1} + \underbrace{\gamma_1 - \alpha_1}_{<0} \leq \underbrace{\gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}}_{\leq \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1}} - 1 \leq \mathsf{H}(F) - 1$$

und die Behauptung ist gezeigt. (Ist andererseits $j = n+1$ und $t \neq 0$, so liefern analoge Überlegungen, dass F' ein Rumpf bezüglich x_{n+1} mit kleinerer Höhe ist.)

Fall 1b: Es sei $(v_2, \ldots, v_n) = (0, \ldots, 0)$. Damit gilt für $2 \leq i \leq n$ (siehe Abbildung 51):

$$b_i = \gamma_i.$$

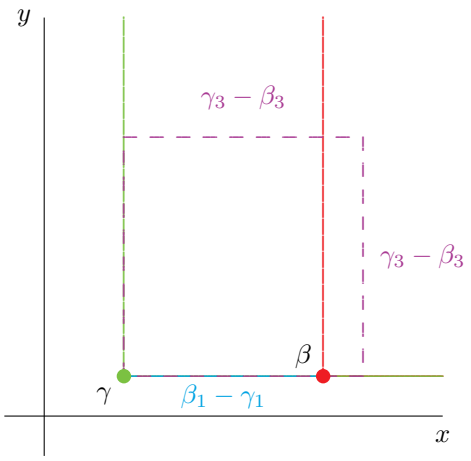


Abbildung 51 : Aufsicht eines Polyeders im Fall 2 von Hilfssatz 36.

Beachte: Gibt es zwei Ecken α und δ von F mit $\alpha_i = \delta_i$ für $2 \leq i \leq n$, so folgt aus der Rumpfgestalt von F, dass

$$\alpha_i = \delta_i = \gamma_i = \beta_i$$

für $2 \leq i \leq n$ ist.

Fall 1b1: Gibt es Ecken $\alpha, \delta \neq \gamma$ mit $\alpha_i = \delta_i = \gamma_i$ für $2 \leq i \leq n$ mit $\alpha_1 \leq \delta_1$ und $\alpha_1 + \alpha_{n+1} = \delta_1 + \delta_{n+1}$ (das heißt, die Initialform von F als Polynom in x_1 und x_{n+1} ist kein Monom), so gilt (mit κ dem Kielpunkt von F) (siehe Abbildung 52):

$$\begin{aligned} \alpha_1 \leq \beta_1 \qquad & \delta_1 \geq \kappa_1, \\ \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} \qquad & \delta_{n+1} \geq \kappa_{n+1}. \end{aligned}$$

(Gleichheit gilt für $\alpha = \beta$ bzw. $\delta = \kappa$). Nach Hilfssatz 10 besitzt daher F' eine Ecke γ' mit

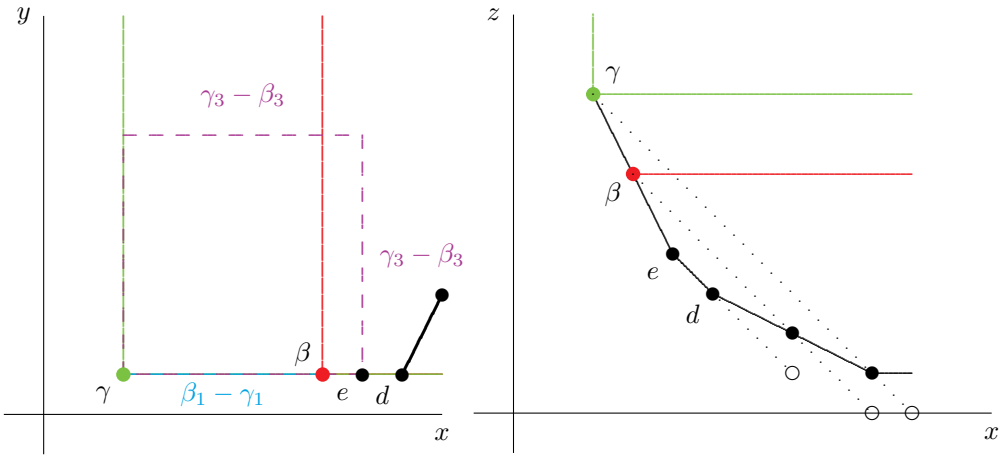


Abbildung 52: Seiten- und Aufsicht eines Polyeders im Fall 1a1 von Hilfssatz35.

$\gamma'_{n+1} \leq \alpha_{n+1} - \delta_{n+1}$. Beachte, dass F' nicht notwendigerweise ein Rumpf ist, aber ein Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1}. Wegen Hilfssatz 31 können wir jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass F' ein Rumpf bezüglich x_{n+1} ist. Für die Höhe H' von F' gilt:

$$\mathsf{H}' \leq \alpha_{n+1} - \delta_{n+1} \leq \beta_{n+1} - \kappa_{n+1} < \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1} = \mathsf{H}(F).$$

Damit ist $\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F)$.

Fall 1b2: Es gibt keine Ecken $\alpha, \delta \neq \gamma$ mit $\alpha_i = \delta_i = \gamma_i$ für $2 \leq i \leq n$, $\alpha \neq \delta$ und $\alpha_1 + \alpha_{n+1} = \delta_1 + \delta_{n+1}$ (das heißt, dass die Initialform von F als Polynom in x_1 und x_{n+1} ein Monom ist). Dann gibt es jedoch einen Ecke α, für die gilt (mit κ dem Kielpunkt von F):

$$\begin{aligned} \beta_1 \leq \alpha_1 \leq \kappa_1, & \\ \beta_{n+1} \geq \alpha_{n+1} \geq \kappa_{n+1}, & \\ \alpha_i = \gamma_i, \qquad & \text{für } 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

und $\alpha_1 + \alpha_{n+1}$ minimal. Damit ist F' ein Rumpf bezüglich x_1 mit Galoinspunkt $\gamma' = (\alpha_1 + \alpha_{n+1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0)$. Sei nun δ jene Ecke von F, sodass $(\delta_1 + \delta_{n+1}, \delta_2, \ldots, \delta_n, 0)$ der Kielpunkt von F' ist. Daher ist $\delta_1 + \delta_{n+1} < \alpha_1 + \alpha_{n+1} < \gamma_1 + \gamma_{n+1}$. Beachte weiters: Ist κ der Kielpunkt von F, dann ist $\delta_{n+1} \geq \kappa_{n+1}$. Insgesamt folgt:

$$\mathsf{H}(F') = \alpha_1 + \alpha_{n+1} - \delta_1 - \delta_{n+1} < \gamma_1 + \gamma_{n+1} - \delta_1 - \delta_{n+1} \leq \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1} + \underbrace{\gamma_1 - \delta_1}_{<0} < \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1} = \mathsf{H}(F).$$

Daher gilt $\mathsf{inv}^{na}(F') \leq \mathsf{inv}^{na}(F)$.

Fall 2: Der Hutmacher antworte auf $J = \{1, n+1\}$ mit $j = 1$ und $t = 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} F'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) &= F(x_1, \ldots, x_n, x_1 x_{n+1}) \\ &= c_\gamma x_1^{\gamma_1 + \gamma_{n+1}} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n} x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + \\ &\quad c_\beta x_1^{\beta_1 + \beta_{n+1}} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n} x_{n+1}^{\beta_{n+1}} + \\ &\quad G(x_1, \ldots, x_n, x_1 x_{n+1}). \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung ist

$$\beta_1 + \beta_{n+1} < \gamma_1 + \gamma_{n+1}.$$

Daher ist F' bzw. $N(F')$ ein echter Schiefrumpf (siehe Abbildung 53). Höhe und Länge haben sich nicht verändert.

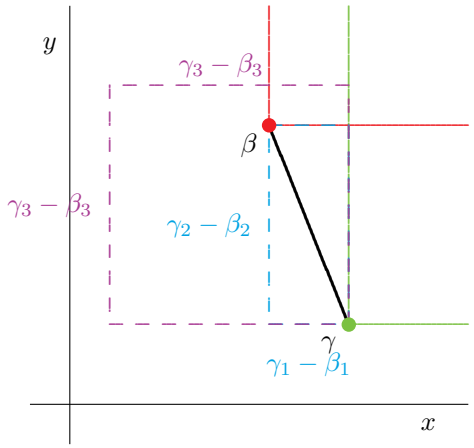


Abbildung 53 : Seitenansicht eines Schiefrumpfs im Fall 2 von Hilfssatz 33.

Für den Galionspunkt $\gamma' = (\gamma_1+\gamma_{n+1}, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1})$ und den Bugpunkt $\beta' = (\beta_1+\beta_{n+1}, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1})$ von F' gelten die Ungleichungen:

$$\beta'_1 - \gamma'_1 = \beta_1 + \beta_{n+1} - \gamma_1 - \gamma_{n+1} < 0.$$

Daher ist entweder

$$\mathsf{Stg}_1(F') < \mathsf{Stg}_1(F),$$

oder es ist $\mathsf{Stg}_1(F') = \mathsf{Stg}_1(F)$ und

$$\mathsf{Stg}_2(F') < \mathsf{Stg}_2(F).$$

Insgesamt ist damit

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

Fall 3: Der Hutmacher antworte auf $J = \{1, n+1\}$ mit $j = n+1$ und $t = 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} F'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) &= F(x_1 x_{n+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &= c_\gamma x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n} x_{n+1}^{\gamma_1+\gamma_{n+1}} + \\ &\quad c_\beta x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} x_{n+1}^{\beta_1+\beta_{n+1}} \\ &\quad + G(x_1 x_{n+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung ist

$$\beta_1 + \beta_{n+1} < \gamma_1 + \gamma_{n+1}.$$

Da F ein Rumpf bezüglich x_{n+1} ist, ist klar, dass $\gamma(F') = \gamma'$ und $\beta(F') = \beta'$ ist. Damit gilt aber:

$$\mathsf{L}(F') = \gamma'_{n+1} - \beta'_{n+1} = \gamma_1 + \gamma_{n+1} - \beta_1 - \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} - \beta_{n+1} + \underbrace{\gamma_1 - \beta_1}_{<0} < \gamma_{n+1} - \beta_{n+1} = \mathsf{L}(F).$$

Damit ist

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

(Beachte: Es ist ebenso leicht zu zeigen, dass im Fall 3 sogar $\mathsf{H}(F') < \mathsf{H}(F)$ gilt. Sei nämlich δ jene Ecke von F, sodass $\delta' = (\delta_1, \ldots, \delta_n, \delta_1 + \delta_{n+1}) = \kappa(F')$ ist. Da $\beta_1 - \gamma_1 > 0$ ist, ist $\delta_1 \geq \gamma_1 + 1$. Weiters ist $\delta_{n+1} \geq \kappa_{n+1}$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \mathsf{H}(F') = \gamma'_{n+1} - \kappa(F')_{n+1} = \gamma_1 + \gamma_{n+1} - \delta_1 - \delta_{n+1} \leq \\ \gamma_1 + \gamma_{n+1} - \gamma_1 - 1 - \kappa_{n+1} = \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1} - 1 < \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1} = \mathsf{H}(F). \end{aligned}$$

Es folgt ebenso $\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F)$.) ☺

***Hilfssatz* 34 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) nicht anliegender Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Weiters sei v_β der Bugvektor von F. Ist*

$$v_\beta \notin \mathbb{N}^n,$$

dann ist F ein echter Schiefrumpf und es gibt es eine Strategie das Kaninchens, sodass für F', die Potenzreihe nach dem Spielzug, gilt: F' ist ein nicht anliegender Schiefrumpf und es ist

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $F \in I_F^{na}$ ist. Es ist

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c_\gamma x_1^{\gamma_1} \cdots x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + c_\beta x_1^{\beta_1} \cdots z_{n+1}^{\beta_{n+1}} + G(x, y, z),$$

wobei γ der Galionspunkt bzw. β der Bugpunkt von F ist. Daher ist $\gamma_{n+1} > \beta_{n+1}$. Damit ist

$$v_\beta = (v_1, \ldots, v_n) = (\beta_1 - \gamma_1, \ldots, \beta_n - \gamma_n).$$

Da $v_\beta \notin \mathbb{N}^n$ ist, besitzt der Vektor mindestens eine negative Komponente. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit v_1 eine minimale Komponente von v_β (und damit negativ). Sei weiters ohne Beschränkung der Allgemeinheit v_2 eine maximale Komponente von v_β (und damit positiv). Es gilt also für alle $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} v_1 &\leq v_i, \\ v_2 &\geq v_i, \end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned} \mathsf{Stg}_1(F) &= v_2, \\ \mathsf{Stg}_3(F) &= v_2 + v_1. \end{aligned}$$

Abbildung 53 zeigt die Situation des Hilfssatzes.

Das Kaninchen spiele $J = \{1, 2\}$. Nun unterscheiden wir zwischen den verschiedenen Antworten des Hutmachers:

Fall 1: Der Hutmacher antworte mit $j = 1$ und $t = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} F'(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= c_\gamma x_1^{\gamma_1+\gamma_2} x_2^{\gamma_2} \cdots x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + \\ &\quad c_\beta x_1^{\beta_1+\beta_2} x_2^{\beta_2} \cdots x_{n+1}^{\beta_{n+1}} \\ &\quad + G(x_1, x_1 x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Ist v_1 die einzige negative Komponente von v_β und ist

$$v_1 + v_2 = \beta_1 + \beta_2 - (\gamma_1 + \gamma_2) > 0,$$

dann ist F' ein bezüglich x_{n+1} nicht anliegender Rumpf mit

$$\begin{aligned} \gamma(F') &= (\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{n+1}), \\ \beta(F') &= (\beta_1 + \beta_2, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}). \end{aligned}$$

Da $v_1 + v_2 > 0$ ist, gilt:

$$\mathsf{Stg}_3(F') = 0 < \mathsf{Stg}_3(F) = v_2 + v_1.$$

Ist v_1 die einzige negative Komponente von v_β und ist $v_1 + v_2 \leq 0$, dann ist zwar F' nach wie vor ein Schiefrumpf, aber es ist ebenfalls $\mathsf{Stg}_3(F') < \mathsf{Stg}_3(F)$.

Ist hingegen v_1 nicht die einzige negative Komponente von v_β, dann ist F' wieder ein bezüglich x_{n+1} nicht anliegender Schiefrumpf und man überlegt wie beim Vektorspiel, dass gilt:

$$\mathsf{Stg}_3(F') < \mathsf{Stg}_3(F),$$

oder $\mathsf{Stg}_3(F') = \mathsf{Stg}_3(F)$ und

$$\mathsf{Stg}_4(F') < \mathsf{Stg}_4(F).$$

Insgesamt ist damit

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

Fall 2: Sei nun $j = 2$ und $t = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} F'(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= c_\gamma x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_1+\gamma_2} x_3^{\gamma_3} \cdots x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + \\ & \quad c_\beta x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_1+\beta_2} x_3^{\beta_3} \cdots x_{n+1}^{\beta_{n+1}} + \\ & \quad G(x_1, x_1x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Ist v_2 die einzige positive Komponente von v_β, dann ist $v_{\beta'} \neq (v_\beta)' \in -\mathbb{N}^n$, denn es ist

$$\gamma' = (\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{n+1}) \in \beta' + \mathbb{R}_+^n.$$

Damit ist $\mathsf{H}(F') < \mathsf{H}(F)$.

Ist hingegen v_2 nicht die einzige positive Komponente von v_β, dann ist $\gamma' = \gamma(F')$ und $\beta' = \beta(F')$ und man sieht wie beim Vektorspiel:

$$\mathsf{Stg}_1(F') < \mathsf{Stg}_1(F),$$

oder es ist $\mathsf{Stg}_1(F') = \mathsf{Stg}_1(F)$ und

$$\mathsf{Stg}_2(F') < \mathsf{Stg}_2(F).$$

Insgesamt folgt:

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

Fall 3: Antwortet der Hutmacher mit $j = 1$ und $t \neq 0$ (oder analog mit $j = 2$ und $t \neq 0$, dann ist

$$\begin{aligned} F'(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= c_\gamma x_1^{\gamma_1+\gamma_2} (x_2 + t)^{\gamma_2} x_3^{\gamma_3} \cdots x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + \\ & \quad c_\beta x_1^{\beta_1+\beta_2} (x_2 + t)^{\beta_2} x_3^{\beta_3} \cdots x_{n+1}^{\beta_{n+1}} + \\ & \quad G(x_1, x_1x_2 + tx_1, x_3, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Damit gehen die Ecken γ und β über in

$$\begin{aligned} \gamma' &= (\gamma_1 + \gamma_2, 0, \gamma_3, \ldots, \gamma_{n+1}), \\ \beta' &= (\beta_1 + \beta_2, 0, \beta_3, \ldots, \beta_{n+1}). \end{aligned}$$

Ist nun (siehe Abbildung 54) $\gamma_1 + \gamma_2 > \beta_1 + \beta_2$ und gilt $\beta_i \geq \gamma_i$ für $3 \leq i \leq n$, dann gilt

$$\gamma' \in \beta' + \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

Weiters ist F' ein nicht anliegender Rumpf bezüglich x_{n+1} und da $\gamma' \neq \gamma(F')$ ist, ist

$$\mathsf{H}(F') < \mathsf{H}(F).$$

In allen anderen Fällen ist F' ein Schiefrumpf mit $\mathsf{H}(F') = \mathsf{H}(F)$ und

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma(F'), \\ \beta' &= \beta(F'). \end{aligned}$$

Mit analogen Überlegungen zu früher (siehe etwa den Beweis von Hilfssatz 31) zeigt man nun leicht, dass

$$\mathsf{Stg}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{Stg}(F)$$

ist und daher gilt

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

☺

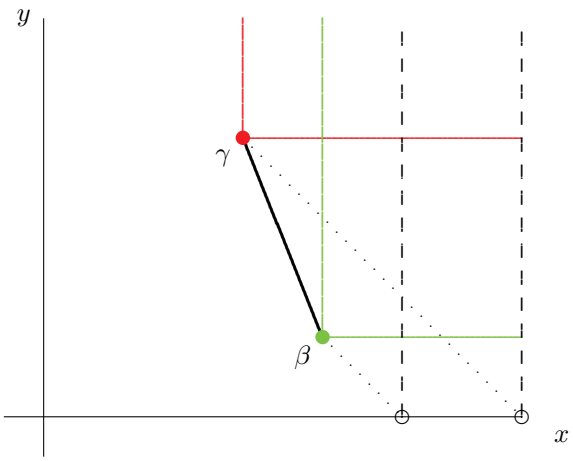


Abbildung 54: Eine Situation aus dem Beweis von Hilfssatz 34, Fall 3.

***Hilfssatz* 35:** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) nicht anliegender Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Weiters sei v_β der Bugvektor von F und w eine maximale Komponente von v_β. Ist*

$$w = \mathsf{L}(F),$$

dann gibt es eine Strategie das Kaninchens, sodass für F', die Potenzreihe nach dem Spielzug, gilt:

1. *F' ist (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ein anliegender Rumpf mit $\mathsf{H}(F') \leq \mathsf{H}(F)$.*
2. *Ist F' (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ein nicht anliegender Schiefrumpf, dann ist $\mathsf{H}(F') < \mathsf{H}(F)$ und damit:*

$$\mathsf{inv}^{na}(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F).$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $F \in I_F^{na}$ ist. Es ist

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c_\gamma x_1^{\gamma_1} \cdots x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + c_\beta x_1^{\beta_1} \cdots z_{n+1}^{\beta_{n+1}} + G(x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

wobei γ der Galionspunkt bzw. β der Bugpunkt von F ist. Daher ist $\gamma_{n+1} > \beta_{n+1}$. Damit ist

$$v_\beta = (v_1, \ldots, v_n) = (\beta_1 - \gamma_1, \ldots, \beta_n - \gamma_n).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei v_1 eine maximale Komponente von v_β, also

$$w := v_1 \geq v_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$w = v_1 = \beta_1 - \gamma_1 = \mathsf{L}(F) = \gamma_{n+1} - \beta_{n+1}.$$

Gibt es ein $i, 2 \leq i \leq n$ mit $v_i \neq 0$, dann folgt die Behauptung wie im Beweis von Hilfssatz 32. Sei also im folgenden $v_i = 0$ für $2 \leq i \leq n$, das heißt es gilt für $2 \leq i \leq n$:

$$\beta_i = \gamma_i.$$

(Für F als Potenzreihe in x_1 und x_{n+1} gilt die Gleichung $\mathsf{Stg}(F) = \mathsf{L}(F)$, siehe Abbildung 55.)

Das Kaninchen spiele $J = \{1, n+1\}$.

Antwortet der Hutmacher mit $j = 1$ bzw. $j = n+1$ mit $t = 0$, so folgt die Behauptung wie im einfachen Polyederspiel (für $j = n+1$ ist F' monomial, für $j = 1$ fällt zumindest die Höhe). Antwortet der Hutmacher ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $j = 1$ und $t \neq 0$, so ist

$$\begin{aligned} F'(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= F(x_1, \ldots, x_n, x_1 x_{n+1} z + t x_1) \\ &= c_\gamma x_1^{\gamma_1 + \gamma_{n+1}} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n} (x_{n+1} + t)^{\gamma_{n+1}} + \\ &\quad c_\beta x_1^{\beta_1 + \beta_{n+1}} x_2^{\beta_2} \cdots x_2^{\beta_n} (x_{n+1} + t)^{\beta_{n+1}} \\ &\quad + G(x_1, \ldots, x_n, x_1 x_{n+1} + t x_1). \end{aligned}$$

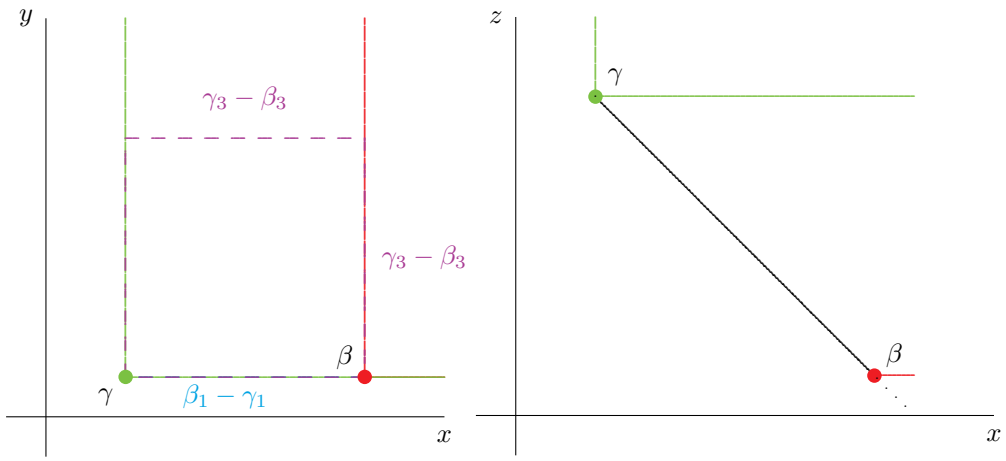


Abbildung 55 : Seiten- und Aufsicht eines Polyeders im Hilfssatz 35.

Sei κ der Kielpunkt von F. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Ist $\beta \neq \kappa$, so gibt es eine Ecke $\alpha \neq \kappa$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \gamma_i, \qquad \text{für } 2 \leq i \leq n, \\ \alpha_1 - \gamma_1 &= \gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

(Die Ecke β erfüllt diese Eigenschaften nach Voraussetzung.) Weiters sei α_1 maximal bzw. äquivalent $\kappa_{n+1} \neq \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$ minimal. Hilfssatz 10 garantiert uns, dass für den Galionspunkt γ' von F' gilt:

$$\gamma'_{n+1} \leq \gamma_{n+1} - \alpha_{n+1} < \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1} = \mathsf{H}(F).$$

Damit ist

$$\mathsf{H}(F') \leq \gamma'_{n+1} \leq \gamma_{n+1} - \alpha_{n+1} < \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1} = \mathsf{H}(F).$$

Beachte, dass F' nicht notwendigerweise ein Rumpf ist, aber mindestens ein Prä-Rumpf. Wegen Hilfssatz 31 können wir jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass F' ein Rumpf ist und damit folgt die Behauptung.

Fall 2: Es ist $\beta = \kappa$. Wegen Hilfssatz 10 gilt für den Galionspunkt γ' von F' die Ungleichung

$$\gamma'_{n+1} \leq \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1} = \mathsf{H}(F).$$

Ist F' anliegend, ist $\mathsf{H}(F') = \mathsf{H}(F)$ möglich.

Ist F' nicht anliegend, gilt für die Höhe von F':

$$\mathsf{H}(F') \leq \gamma'_{n+1} - 1 < \gamma_{n+1} - \kappa_{n+1} = \mathsf{H}(F).$$

Wegen Hilfssatz 31 ist F' ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Rumpf. Insgesamt folgt damit die Behauptung. ☺

***Hilfssatz* 36 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) nicht anliegender Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Dann gibt es eine Strategie des Kaninchens so, dass gilt:*

Sei $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der durch das Spiel entstandenen Schiefrümpfe (mit der Strategie des Kaninchens und einer beliebigen Strategie des Hutmachers). Sind alle F^m der Spielfolge nicht anliegend, dann gewinnt das Kaninchen. Das heißt, es gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, dass nach m Spielzügen F^m bis (auf einen μ-Koordinatenwechsel) monomial ist.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus den Hilfssätzen 32 bis 35. Denn angenommen kein $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielfolge wäre monomial, dann gilt nach den Hilfssätzen für jedes $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{inv}^{na}(F^{m+1}) <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^{na}(F^m).$$

Damit wäre $\left(\mathsf{inv}^{na}(F^m)_{m\in\mathbb{N}}\right)$ eine streng monoton fallende Folge in $\mathbb{N}^6$, im Widerspruch zur Wohlgeordnetheit von $(\mathbb{N}^6, <_{\text{lex}})$. ☺

4.3.3 Tschirnhaus Transformation

Beispiel 25 beschreibt das wesentliche Problem beim schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^3$. Analoge Beispiele gibt es für jede Dimension. Ist jedoch Induktionsannahme 24 erfüllt, lässt sich das Problem mit Hilfe eines speziellen μ Koordinatenwechsels, der Tschirnhaus Transformation, in den Griff bekommen. Im Folgenden wird die Tschirnhaus Transformation vorgestellt.

Sei im Folgenden, wie in der Induktionsannahme 24, $\mathbb{F}$ ein Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$ oder ein Ring mit $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{F}$.

Definition : Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$.

1. Sei F ein Prä-Rumpf bezüglich x_i mit Galionspunkt γ. Dann ist F ein Tschirnhaus Prä-Rumpf, wenn F keinen Term M besitzt mit $\mathrm{ord}_{x_i}(M) = \gamma_i - 1$. Das heißt: Ist $\alpha \in \mathrm{Tr}(F)$, dann ist $\alpha_i \neq \gamma_i - 1$.

2. Sei F ein Rumpf bezüglich x_i mit Galionspunkt γ. Dann ist F ein Tschirnhaus Rumpf, wenn F keinen Term M besitzt mit $\mathrm{ord}_{x_i}(M) = \gamma_i - 1$.

3. Sei F ein Schiefrumpf bezüglich x_i mit Galionspunkt γ. Dann ist F ein Tschirnhaus Schiefrumpf, wenn F keinen Term M besitzt mit $\mathrm{ord}_{x_i}(M) = \gamma_i - 1$.

***Hilfssatz* 37 :** *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$ oder ein Ring mit $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{F}$ und $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein bezüglich x_i anliegender Prä-Rumpf. Dann ist F bis auf einen μ Koordinatenwechsel ein Tschirnhaus Prä-Rumpf. Das heißt, es gibt einen μ Koordinatenwechsel ψ, sodass $\psi(F)$ ein Tschirnhaus Prä-Rumpf ist. Wir nennen dann ψ eine Tschirnhaus Transformation.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$$

ein Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1}. Wir zeigen: Ist γ der Galionspunkt von F, dann gibt es einen μ Koordinatenwechsel ψ so, dass $\psi(F)$ ein Prä-Rumpf bezüglich x_{n+1} ist mit

$$\psi\big(F(x_1, \ldots, x_{n+1})\big) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \alpha_{n+1} \neq \gamma_{n+1} - 1}} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_{n+1}) \quad = \quad & x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} \big(1 + G(x_1, \ldots, x_{n+1})\big) + \\ & x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-1} \cdot \gamma_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x_1, \ldots, x_n) + \\ & H(x_1, \ldots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

mit $G(0) = 0$, $g_i \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_n]]$ homogen vom Grad i, $\mathrm{ord}_{x_{n+1}}(H) \leq \gamma_{n+1} - 2$.

Betrachte den μ Koordinatenwechsel ψ gegeben durch

$$\begin{aligned} x_i \quad & \longrightarrow \quad x_i, \text{ für } 1 \leq i \leq n, \\ x_{n+1} \quad & \longrightarrow \quad x_{n+1} - g_1. \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\psi(F) &= (x_{n+1}-g_1)^{\gamma_{n+1}} + \underbrace{(x_{n+1}-g_1)^{\gamma_{n+1}} G(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}-g_1))}_{=:\widetilde{G}} + \\
&\quad (x_{n+1}-g_1)^{\gamma_{n+1}-1}\cdot\gamma_{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{\infty} g_i + \underbrace{H(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}-g_i)}_{=:\widetilde{H}} \\
&= \sum_{k=0}^{\gamma_{n+1}} \binom{\gamma_{n+1}}{k} x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-k}(-g_1)^k + \\
&\quad (\sum_{k=0}^{\gamma_{n+1}-1} \binom{\gamma_{n+1}-1}{k} z^{\gamma_{n+1}-1-k}(-g_1)^k)\gamma_{n+1}\sum_{i=1}^{\infty} g_i + \widetilde{H} + \widetilde{G} \\
&= x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} - x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-1} g_1\gamma_{n+1} + x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-1} g_1\gamma_{n+1} + x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-1}\gamma_{n+1}\sum_{i=2}^{\infty} g_i + \\
&\quad \underbrace{\sum_{k=2}^{\gamma_{n+1}} \binom{\gamma_{n+1}}{k} x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-k}(-g_i)^k + (\sum_{k=1}^{\gamma_{n+1}-1} \binom{\gamma_{n+1}-1}{k} x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-1-k}(-g_i)^k)\gamma_{n+1}\sum_{i=1}^{\infty} g_i + \widetilde{H} + \widetilde{G}}_{=:\Gamma} \\
&= x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} + x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-1}\gamma_{n+1}\sum_{i=2}^{\infty} g_i + \Gamma + \widetilde{G}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathrm{ord}_{x_{n+1}}(\widetilde{G}) \geq \gamma_{n+1}+1$ und $\mathrm{ord}_{x_{n+1}}(\Gamma) \leq \gamma_{n+1}-2$. Daher können wir $\psi(F)$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
\psi(F) &= x_{n+1}^{\gamma_{n+1}}\big(1+G_1(x_1,\ldots,x_{n+1})\big) + \\
&\quad x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-1}\cdot\gamma_{n+1}\cdot\sum_{i=2}^{\infty} h_i(x,y) + \\
&\quad H_1(x_1,\ldots,x_{n+1}),
\end{aligned}$$

mit $G_1(0)=0$, $h_i \in \mathbb{F}[[x_1,\ldots,x_n]]$ homogen vom Grad i, $\mathrm{ord}_{x_{n+1}}(H_1) \leq \gamma_3 - 2$.

Mit Induktion über i ergibt sich nun eine Folge von Koordinatenwechseln ψ_i. Diese konvergiert in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie zu einem μ Koordinatenwechsel ψ so, dass $\psi(F)$ die behaupteten Eigenschaften besitzt. ☺

Folgendes Beispiel veranschaulicht, wie die Tschirnhaus-Transformation dem Kaninchen beim schweren Polyederspiel hilft:

Beispiel 38 : Sei $F(x,y,z) \in \mathbb{F}[[x,y,z]]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= z^2 - \\
&\quad t^2x^2 + x^4y^3 + x^7y^3 + x^7y^2 + x^{11}y + x^{17}.
\end{aligned}$$

Dieses Polynom entspricht fast völlig dem Polynom aus Beispiel 25. Ein wesentlicher Unterschied ist, dass der Term $-2xz$ fehlt. Dadurch ist F ein Tschirnhaus Rumpf (siehe Abbildung 56). Beim Beispiel 25 ergab sich ein Problem für die Spielfolge $J=\{1,3\}$ und $j=1$ in Verbindung mit $t=1$. Hier ist dies nicht mehr der Fall, denn wir erhalten (siehe Abbildung 56):

$$F'(x,y,z) = f(x,y,xz-x) = x^2z^2 + 2x^2z + x^2 - x^2 + x^4y^3 + x^7y^2 + x^{11}y + x^{17}.$$

Die Höhe ist aufgrund des Terms $2z$ von 2 auf 1 gefallen.

4.3.4 Anliegende Schiefrümpfe

Wir gehen nun – anders als im Abschnitt 4.3.2 – von einem nicht anliegenden Schiefrumpf F aus und geben eine Wahl des Kaninchens an. Dann zeigen wir: Ist $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der aus

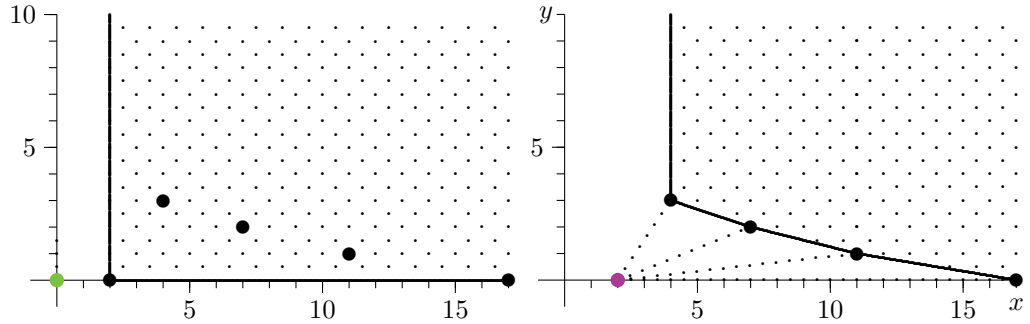


Abbildung 56 : Nach einem Spielzug fällt die Höhe von 2 auf 1.

dem Spiel resultierenden Schiefrümpfe (für die angegebene Strategie des Kaninchens und eine beliebige Strategie des Hutmachers) und ist F^m anliegend für alle $m \in \mathbb{N}$, dann gewinnt das Kaninchen.

Um dies zu zeigen, geben wir eine Funktion inv^a an, die jedem Schiefrumpf G einen von den Koordinaten unabhängigen Wert $\mathsf{inv}^a(G) \in \mathbb{N}^6$ zuordnet. Dann zeigen wir: Ist $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der anliegenden Schiefrümpfe, dann ist solange $\mathsf{inv}^a(F^{m+1}) <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^a(F^m)$, bis F^{m+1} monomial ist.

Definition : Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein bezüglich x_{n+1} anliegender Tschirnhaus Schiefrumpf und $N := N(F)$ der zu F gehörende Newton Polyeder. Wir definieren inv^a: Sei dazu W_F die Menge aller Potenzreihen, sodass gilt: Ist $G \in W_F$, so ist G ein anliegender Tschirnhaus Schiefrumpf bezüglich x_{n+1} und es gibt einen μ Koordinatenwechsel φ mit $G = \varphi(F)$. Weiters sei $I_F^a \subseteq W_F$ jene Menge, für die gilt: Ist $G \in I_F^a$, dann gilt für alle $H \in W_F$:

$$\big(\mathsf{H}(G), \mathsf{L}(G), \mathsf{Stg}(G)\big) \leq_{\text{lex}} \big(\mathsf{H}(H), \mathsf{L}(H), \mathsf{Stg}(H)\big).$$

(Da nach Voraussetzung $F \in I_F^a$ ist, ist $I_F^a \neq \emptyset$.) Nun setzen wir

$$\mathsf{inv}^a(F) := \big(\mathsf{H}(G), \mathsf{L}(G), \mathsf{Stg}(G)\big) \text{ mit } G \in I_F^a.$$

***Hilfssatz* 39 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ eine bezüglich x_{n+1} anliegende Potenzreihe in fixen Koordinaten. Dann gibt es ein Strategie des Kaninchen, so dass nach m Spielzügen F^m ein anliegender Tschirnhaus Rumpf ist mit $\mathsf{H}(F^m) = \mathsf{H}(F)$.*

Beweis. Hilfssatz 27 zeigt, dass das Kaninchen einen Prä-Rumpf erreichen kann. Dieser lässt sich wegen Hilfssatz 37 zu einem Tschirnhaus Prä-Rumpf machen. Dann folgt die Behauptung aus Hilfssatz 31. ☺

Nun gehen wir analog zum Abschnitt 4.3.2 vor:

***Hilfssatz* 40 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) anliegender Tschirnhaus Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Weiters sei v_β der Bugvektor von F und w eine maximale Komponente von v_β. Ist*

$$w > \mathsf{L}(F),$$

dann gibt es eine Strategie das Kaninchens, sodass für F', die Potenzreihe nach dem Spielzug, gilt: F' ist ein anliegender Schiefrumpf und es ist

$$\mathsf{inv}^a(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^a(F).$$

Beweis. Analog zum Beweis von Hilfssatz 32, wobei inv^a statt inv^{na} verwendet wird. ☺

***Hilfssatz* 41 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) anliegender Tschirnhaus Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Weiters sei v_β der Bugvektor von F und w eine maximale Komponente von v_β. Ist*

$$w < \mathsf{L}(F),$$

dann gibt es eine Strategie das Kaninchens, sodass für F', die Potenzreihe nach dem Spielzug, gilt: F' ist (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ein Schiefrumpf und es ist

$$\big(\mathsf{H}(F'), \mathsf{L}(F'), \mathsf{Stg}(F')\big) <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^a(F).$$

Beweis. Analog zum Beweis von Hilfssatz 33. ☺

Hilfssatz 42 : *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) anliegender Tschirnhaus Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Weiters sei v_β der Bugvektor von F. Ist*

$$v_\beta \notin \mathbb{N}^n,$$

dann ist F ein echter Tschirnhaus Schiefrumpf und es gibt es eine Strategie das Kaninchens, sodass für F', die Potenzreihe nach dem Spielzug, gilt: F' ist ein anliegender Tschirnhaus Schiefrumpf und es ist

$$\mathsf{inv}^a(F') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^a(F).$$

Beweis. Analog zum Beweis von Hilfssatz 34, wobei inv^a statt inv^{na} verwendet wird. ☺

Hilfssatz 43 : *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) anliegender Tschirnhaus Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Weiters sei v_β der Bugvektor von F und w eine maximale Komponente von v_β. Ist*

$$w = \mathsf{L}(F),$$

dann gibt es eine Strategie das Kaninchens, sodass für F', die Potenzreihe nach dem Spielzug, gilt:

$$\mathsf{H}(F') < \mathsf{H}(F)$$

Beweis. Bis auf den kritischen Fall, der unten behandelt wird, verläuft der Beweis analog zum Beweis von Hilfssatz 35, wobei inv^a statt inv^{na} verwendet wird. Beachte dabei auch, dass das Kaninchen wegen Hilfssatz 37 und Hilfssatz 31 aus jedem anliegenden Prä-Rumpf einen anliegenden Tschirnhaus Rumpf machen kann.

Der kritische Fall: Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit F ein Tschirnhaus Rumpf in I_F^a der Form

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n} \cdot \big(x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} G(x_1, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{i=0}^{\gamma_{n+1}-2} x_{n+1}^i g_i(x_1, \ldots, x_n)\big),$$

mit $G(0) \neq 0, g_i \in \mathbb{F}[[x_1, \ldots, x_n]], g(0) \neq 0$ und γ der Galionspunkt bzw. β der Bugpunkt von F. Daher ist $\gamma_{n+1} > \beta_{n+1}$. Damit ist

$$v_\beta = (v_1, \ldots, v_n) = (\beta_1 - \gamma_1, \ldots, \beta_n - \gamma_n).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei v_1 eine maximale Komponente von v_β, also

$$w := v_1 \geq v_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$w = v_1 = \beta_1 - \gamma_1 = \mathsf{L}(F) = \gamma_{n+1} - \beta_{n+1}.$$

Im kritischen Fall ist außerdem $v_i = 0$ für $2 \leq i \leq n$, das heißt es gilt für $2 \leq i \leq n$:

$$\beta_i = \gamma_i,$$

und Kiel- und Bugpunkt von F stimmen überein, also

$$\gamma = \kappa.$$

Sei nun $j = 1$ und $t \neq 0$ (analoge Überlegung mit $j = 2$ und $t \neq 0$, für $t = 0$ ist F' monomial), dann ist

$$\begin{aligned} F' &= x_1^{\gamma_1+\gamma_{n+1}} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n} \cdot \big((x_{n+1}+t)^{\gamma_{n+1}} G(x_1,\ldots,x_n,x_1x_{n+1}+tx_1) + \sum_{i=0}^{\gamma_{n+1}-2} (x_{n+1}+t)^i g_i\big) \\ &= x_1^{\gamma_1+\gamma_{n+1}} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n} \cdot \Big(x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} G(x_1,\ldots,x_n,x_1x_{n+1}+tx_1) + \\ &\quad \gamma_{n+1} t x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-1} G(x_1,\ldots,x_n,x_1xn+1+tx_1) + \\ &\quad \sum_{i=0}^{\gamma_{n+1}-2} \big(\binom{\gamma_3}{i} x_{n+1}^i t^{\gamma_{n+1}-i} G(x_1,\ldots,x_n,x_1x_{n+1}+tx_1) + (x_{n+1}+t)^i g_i(x,y)\big)\Big). \end{aligned}$$

Beachte, dass daher

$$(\gamma_1+\gamma_{n+1},\gamma_2,\ldots,\gamma_{n+1}-1) \in \mathrm{Tr}(F')$$

ist. Damit ist F' ein Prä-Rumpf, für dessen Höhe gilt:

$$\mathsf{H}(F') \leq \gamma_{n+1} - 1 < \gamma_3 = \mathsf{H}(F).$$

Damit folgt die Behauptung. ☺

***Hilfssatz* 44 :** *Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1,\ldots,x_{n+1}]]$ ein (bezüglich x_{n+1}) anliegender Tschirnhaus Schiefrumpf in fixen Koordinaten. Dann gibt es eine Strategie des Kaninchens so, dass gilt:*

Sei $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der durch das Spiel entstandenen Schiefrümpfe (mit der Strategie des Kaninchens und einer beliebigen Strategie des Hutmachers). Sind alle F^m der Spielfolge anliegende Tschirnhaus Schiefrümpfe, dann gewinnt das Kaninchen. Das heißt, es gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, dass nach m Spielzügen F^m bis (auf einen μ-Koordinatenwechsel) monomial ist.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus den Hilfssätzen 40 bis 43 und Hilfssatz 39. Denn angenommen kein $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielfolge wäre monomial, dann gilt nach den Hilfssätzen für jedes $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{inv}^a(F^{m+1}) <_{\mathrm{lex}} \mathsf{inv}^a(F^m).$$

Damit wäre $(\mathsf{inv}^a(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge in $\mathbb{N}^6$, im Widerspruch zur Wohlgeordnetheit von $(\mathbb{N}^6, <_{\mathrm{lex}})$. ☺

4.3.5 Lösung / Induktionsschritt

In den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.4 haben wir gezeigt, dass das Kaninchen gewinnen kann, wenn die Folge der „erspielten“ Schiefrümpfe immer nicht anliegend bzw. anliegend ist. Nun zeigen wir, analog zum schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ (siehe Kapitel 3), dass das Kaninchen auch bei einem Spiel gewinnt, in dem die Schiefrümpfe zwischen nicht anliegend und anliegend alternieren.

Definition : Sei $F \in \mathbb{F}[[x_1,\ldots,x_{n+1}]]$ und $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der Spielzüge im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$.

1. Die Folge der Spielzüge heißt stationär anliegend, falls es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ gibt so, dass F_m anliegend ist für alle $m \geq m_0$.

2. Die Folge der Spielzüge heißt stationär nicht anliegend, falls es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ gibt so, dass F^m hoch ist für alle $m \geq m_0$.

3. Die Folge der Spielzüge heißt alternierend, falls sie weder stationär anliegend, noch stationär nicht anliegend ist.

Bemerkung : Falls die Folge der Spielzüge stationär nicht anliegend bzw. anliegend ist, gibt es ein Gewinnstrategie für das Kaninchen. Dies wurde in den Hilfssätzen 36 bzw. 44 gezeigt.

Im Folgenden wird gezeigt, dass das Kaninchen im schweren Polyederspiel gewinnt, falls die Folge der Spielzüge alternierend ist.

***Hilfssatz* 45 :** *Sei F ein bezüglich x_{n+1} anliegender Rumpf und F' die Potenzreihe nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^{n+1}$, Charakteristik 0. Ist F' nicht anliegend, dann ist*

$$\mathsf{H}(F') < \mathsf{H}(F).$$

Beweis. Beachte: Da F ein Rumpf ist, spielt das Kaninchen, wie gezeigt, $J = \{1, n+1\}$. Antwortet der Hutmacher mit $j \in J$ und $t = 0$, so folgt die Behauptung wie im Hilfssatz 32, Fall 2 bzw. Hilfssatz 33, Fall 1. Für $t \neq 0$ folgt die Behauptung wie im Hilfssatz 33, Fall 3 bzw. Hilfssatz 43. Beachte dabei, dass F' nicht anliegend ist. ☺

***Hilfssatz* 46 :** *Gegeben sei ein Rumpf F bezüglich x_{n+1}. Spielt der Hutmacher so, dass die Folge $(F^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielzüge im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^{n+1}$, Charakteristik 0, alternierend ist, dann gewinnt das Kaninchen.*

Beweis. Betrachte die Teilfolge $(F^{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ der anliegenden Schiefrümpfe des Spiels, das heißt, $(F^{\nu(m)})$ ist anliegend für alle $m \in \mathbb{N}$. Nun kann die Behauptung analog zum Hilfssatz 22 unter Verwendung der Hilfssätze 45 und 44 gezeigt werden.

Betrachte die Teilfolge $(F^{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ der anliegenden Schiefrümpfe des Spiels, das heißt, $(F^{\nu(m)})$ ist anliegend für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{inv}^a(F^{\nu(m)}) <_{\text{lex}} \mathsf{inv}^a(F^{\nu(m+1)}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Sei $F^{\nu(m)} = F^n$ und $F^{\nu(m+1)} = F^{n+l}$. (Beachte, dass beide Potenzreihen nach Voraussetzung anliegend sind.) Ist $l = 1$, so folgt die Behauptung, wie im Beweis von Hilfssatz 44 gezeigt wurde. Ist $l > 1$, so gilt für alle $0 < k < l$, dass F^{n+k} nicht anliegend ist. Nach Hilfssatz 45 und Hilfssatz 35 gelten für alle $0 < k < l$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\mathsf{H}(F^{n+k}) &< \mathsf{H}(F^n),\\ \mathsf{H}(F^{n+l}) &\leq \mathsf{H}(F^{n+k}).\end{aligned}$$

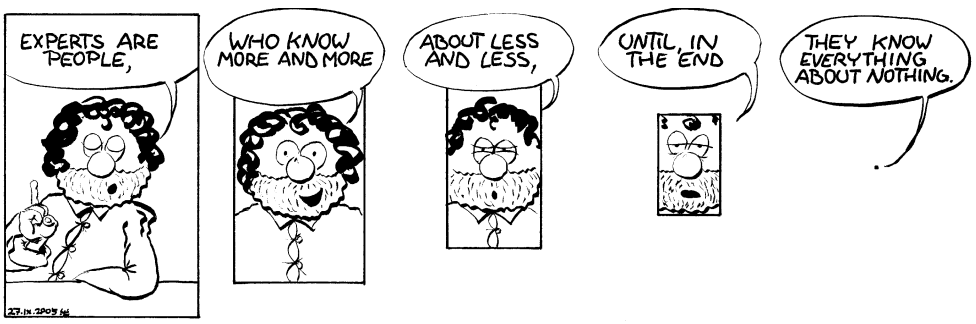
Daher folgt die Behauptung, denn es ist:

$$\mathsf{H}(F^{\nu(m+1)}) = \mathsf{H}(F^{n+l}) \leq \mathsf{H}(F^{n+k}) < \mathsf{H}(F^n) = \mathsf{H}(f^{\nu(m)}).$$

☺

***Satz* 47 :** *Es gibt eine Gewinnstrategie des Kaninchens für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^n$, Charakteristik 0.*

Beweis. Der Beweis folgt mit Induktion über die Dimension. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Der Induktionsschritt gilt nach den Ergebnissen dieses Kapitels. ☺



Kapitel 5

Das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^3$, Charakteristik p

Wird das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^3$ über einem Körper $\mathbb{F}$ mit Charakteristik 0 gespielt, so gibt es eine Gewinnstrategie für den ersten Spieler. Dies wurde im vorherigen Kapitel gezeigt. Eine wesentliche Rolle spielte dabei die Tschirnhaus Transformation. Diese versagt aber im Allgemeinen, wenn der zugrunde liegende Körper Charakteristik $p > 0$ besitzt. Kritische Beispiele (siehe 5.1) haben die Form

$$F(x, y, z) = z^p + f(x, y),$$

mit $f \in \mathbb{F}[[x, y]]$. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit diesen Spezialfällen. Dabei lässt sich das Problem in einem neuen Spiel formulieren, das dem schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ ähnelt, dem Golfspiel. Der Name Golfspiel wurde gewählt, weil bei den Potenzreihen, mit denen gespielt wird, gewisse Terme fehlen und die Potenzreihen daher „Löcher“ besitzen. Der wesentliche Unterschied zum schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ liegt darin, dass die Höhe steigen kann. Doch, wie gezeigt wird, steigt sie um höchstens eine Einheit. Da dies nur einen kleinen Unterschied ausmacht, lässt sich dieses Problem beheben und das Golfspiel gewinnen. Die verwendeten Methoden ähneln denen, die beim schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ verwendet wurden.

In diesem Kapitel sei p immer eine Primzahl und $\mathbb{F}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik p.

5.1 Probleme mit Charakteristik $p > 0$

Die im Kapitel 4 beschriebene Strategie zeigt, dass es für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^3$ eine Gewinnstrategie gibt, sofern der zugrunde liegende Körper die Charakteristik 0 besitzt. Versuchen wir nun dieselbe Vorgehensweise auch bei einem Körper der Charakteristik $p > 0$ zu verwenden. Dazu folgendes Beispiel:

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$ und $F \in \mathbb{F}[[x, y, z]]$ gegeben durch:

$$F(x, y, z) = z^2 + x^2 + x^3y^3 + x^4y + x^4 + x^7.$$

Damit ist F ein Tschirnhaus Rumpf bezüglich z (siehe Abbildung 57). Der in Kapitel 4 beschriebenen Strategie folgend spielt das Kaninchen $J = \{1, 3\}$. Antwortet der Hutmacher mit $j = 1$ und $t = 1$, dann ist wegen $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$ (siehe Abbildung 57)

$$\begin{aligned} F'(x, y, z) &= F(x, y, xz - x) \\ &= x^2z^2 + 2x^2z + 2x^2 + x^3y^3 + x^4y + x^4 + x^7 \\ &= x^2z^2 + x^3y^3 + x^4y + x^4 + x^7. \end{aligned}$$

In einem Körper mit Charakteristik ungleich 2 wäre die Höhe von 2 auf 1 gefallen, da dann $(2, 0, 1)$ der Galionspunkt von F wäre. Da aber die Charakteristik von $\mathbb{F}$ gleich 2 ist, ist $F'(x, y, z) = x^2z^2 + x^3y^3 + x^4y + x^4 + x^7$. Die Höhe ist gleich geblieben und der Rumpf ist zu

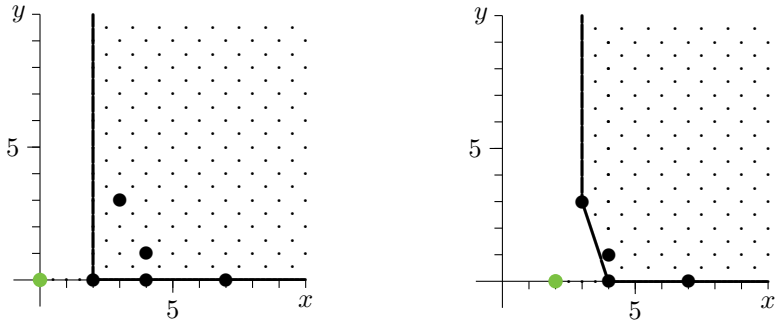


Abbildung 57 : Problem beim schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ mit positiver Charakteristik.

einem Prä-Rumpf geworden. Die Tschirnhaus Transformation ist bei diesem Beispiel also von keinem Nutzen. Beachte weiters, dass im obigen Beispiel die Ecke $(2, 0, 0)$ „gelöscht“ werden konnte, ohne andere Ecken zu erzeugen. Man kann nun zwar F', wie gezeigt, mit der Gewinnstrategie für das schwere Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ wieder zu einem Rumpf machen, doch wenn die einzelne Ecke, die in der xy-Ebene liegt, wieder von der Form (ap, bp) ist, ist nichts gewonnen. Ist nämlich $F \in \mathbb{F}[[x, y, z]]$ gegeben als

$$F(x, y, z) = z^p + f(x, y) \text{ mit } f \in \mathbb{F}[[x, y]],$$

und ist $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik p, so gilt allgemein: Besitzt F einen Term $x^{ap}y^{bp}$, so können diese durch einen Koordinatenwechsel „gelöscht“ werden. Sei zum Beispiel

$$F(x, y, z) = z^p - x^{ap}y^{bp}$$

und ψ der durch

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x, \\ y &\longrightarrow y, \\ z &\longrightarrow z + x^a y^b, \end{aligned}$$

gegebene Koordinatenwechsel. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi(F) &= F(x, y, z + x^a y^b) \\ &= z^p + x^{ap}y^{bp} - x^{ap}y^{bp} \\ &= z^p. \end{aligned}$$

Probleme treten also im speziellen Fall mit

$$F(x, y, z) = z^p + f(x, y) \text{ mit } f \in \mathbb{F}[[x, y]]$$

auf.

Die Frage, die in diesem Kapitel untersucht wird, lautet: Kann der Projektionspolyeder bezüglich $(0, 0, p)$ monomial gemacht werden, ohne dass die Ecke des monomialen Polyeders von der Form (ap, bp) ist? Diese Frage wird im Folgenden untersucht. Dabei kann jedoch das Spiel wieder auf zwei Dimensionen beschränkt werden. Betrachte dazu nur das Polynom f in zwei Variablen. Der zu f gehörende Polyeder ist gleichzeitig der Projektionspolyeder von F bezüglich $(0, 0, p)$. Um jedoch das eben beschriebene Problem wiederzugeben, werden alle Punkte in $p \cdot \mathbb{N}^2$ „gelöscht“.

Dieses modifizierte Spiel mit „Löchern“ wird im nächsten Abschnitt als Golfspiel eingeführt. Das Golfspiel zu lösen bedeutet, einen monomialen Polyeder zu erhalten, dessen Ecke $(\alpha, \beta) \notin p \cdot \mathbb{N}^2$ ist.

5.2 Das Golfspiel

Im Folgenden sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit Charakteristik p.

Definition: Die Mengen B_p, L_p und die Abbildung l_p seien wie folgt definiert:

1. Die Menge $B_p \subseteq \mathbb{N}^2$ ist definiert durch:
$$B_p := \mathbb{N}^2 \setminus p \cdot \mathbb{N}^2.$$

2. Die Menge $L_p \subseteq \mathbb{F}[[x,y]]$, definiert durch
$$L_p := \{f \in \mathbb{F}_p[[x,y]] \ : \ f = \sum_{\alpha \in B_p} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}\},$$
heißt die Menge der gelochten Potenzreihen. (Beachte, dass $L_p \cong \mathbb{F}[[x,y]]/_{\mathbb{F}[[x^p,y^p]]}$ und damit kein Ring mehr, aber immerhin eine abelsche Gruppe und ein $\mathbb{F}$-Vektorraum, ist.)

3. Sei $g \in \mathbb{F}[[x,y]]$ mit Träger $\mathrm{Tr}(g) \subseteq \mathbb{N}^n$. Ist
$$g(x,y) = \sum_{\alpha \in \mathrm{Tr}(g)} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2},$$
dann wird die Abbildung l_p wie folgt definiert:
$$\begin{aligned} l_p : \mathbb{F}[[x,y]] &\to L_p, \\ g &\mapsto l_p(g) := \sum_{\alpha \in \mathrm{Tr}(g) \cap B_p} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

4. Sei $A \subseteq \mathbb{N}^2 \setminus p \cdot \mathbb{N}^2$. Dann heißt der von A erzeugte Newton Polyeder $N(A)$ ein gelochter Polyeder.

Bemerkung: Ist f eine gelochte Potenzreihe, dann ist klarererweise der zu f gehörende Newton Polyeder $N(f)$ ein gelochter Polyeder. Ist ein gelochter Polyeder monomial, so ist seine Ecken (a,b) kein Element von $p \cdot \mathbb{N}^2$.

Weiters sind natürlich alle Definitionen wie Höhe, Länge, etc. auch für gelochte Potenzreihen und Polyeder gültig.

Da bei den Potenzreihen, mit denen wir uns im Folgenden beschäftigen, alle Monome, deren Hochzahlen Vielfache von p sind, in ein „Loch“ fallen, sprechen wir vom Golfspiel (mit p-Löchern).

5.2.1 Spieldefinition

Sei $\mathbb{F}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik p und $f(x,y) = \sum_{\alpha \in B_p} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$ eine gelochte Potenzreihe in L_p mit fixen Koordinaten x und y.

Zwei Spieler, das Kaninchen und der Hutmacher, machen folgende Züge:

1. Das Kaninchen spielt $J = \{1,2\}$.

2. Der Hutmacher wählt unter Berücksichtigung von f ein $j \in J$ und ein $t \in \mathbb{F}$. Dann ersetzt er f durch
$$f'(x,y) := l_p\big(f(x, x(y+t))\big) \text{ für } j = 1,$$
bzw.
$$f'(x,y) := l_p\big(f(y(x+t), y)\big) \text{ für } j = 2.$$

Dann wiederholen die beiden Spieler ihre Züge. Sei $(f^i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge der resultierenden gelochten Potenzreihen, also $f^0 := f, f^1 := f', f^2 := f''$, etc. Das Kaninchen gewinnt, wenn nach endlich vielen Zügen, etwa m, die gelochte Potenzreihe f^m bis auf einen Koordinatenwechsel eine monomiale gelochte Potenzreihe ist, das heißt, es gibt ein $\psi \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{F}[[x,y]]\right)$ mit

$$g := l_p\big(\psi(f^m)\big) \in L_p \text{ und } g(x,y) = x^k y^l q(x,y) \text{ mit } k,l \in \mathbb{N}\, q \in \mathbb{F}[[x,y]], q(0,0) \neq 0.$$

Problem: Zeige, dass das Kaninchen immer gewinnt.

5.2.2 Mögliches Problem beim Golfspiel

Wie verhält sich die Höhe eines gelochten Newton Polyeders im Golfspiel? Beim schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ kann die Höhe eines Polyeders während des Spiels nicht steigen. In diesem Abschnitt wird dagegen gezeigt, dass die Höhe im Golfspiel steigen kann.

Der Abschnitt 3.2 (schweres Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$) hat gezeigt, dass für das Verhalten der Höhe besonderes jene Polyeder interessant sind, bei denen Länge und Steigung gleich groß sind. Dann ist nämlich die Initialform kein Monom und es können entlang der Geraden, die durch die Punkte der Initialform geht, Punkte gelöscht oder erzeugt werden. Betrachten wir eine Ecke $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ mit $a + b \notin p \cdot \mathbb{N}$. Dann liegen auf der Geraden durch (a, b) mit dem Richtungsvektor $(1, -1)$ wieder nur Punkte mit derselben Eigenschaft. Sie enthält also keine Löcher, das heißt, es gilt $l_p(x^a y^b) = x^a y^b$. Solch eine Ecke verhält sich also wie eine Ecke im schweren Polyederspiel. Mögliche Probleme werden also nur dann auftreten, wenn es Ecken (a, b) gibt mit $a + b \in p \cdot \mathbb{N}$. Dann liegen auf der Geraden durch (a, b) mit dem Richtungsvektor $(1, -1)$ nämlich auch Löcher. (Es gibt Punkte (c, d) auf der Geraden mit $l_p(x^c y^d) = 0$.) Dazu folgendes Beispiel:

Beispiel 48 : Sei $f(x, y) = xy^5 + x^3y^3 + x^8y^3 \in L_2$. Damit ist $\mathsf{H}(f) = \mathsf{H}(N(f)) = 2$ (siehe Abbildung 58): Spielt der Hutmacher $j = 1$ mit $t = 1$, so ist (siehe Abbildung 59):

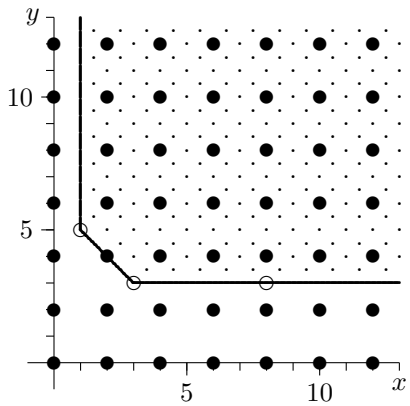


Abbildung 58 : Ein gelochter Polyeder im Golfspiel mit 2-Löchern.

$$\begin{aligned} f'(x, y) &= l_p\big(f(x, xy + x)\big) \\ &= x^6y^3(y^2 + 1) + x^{11}(y^3 + y^2 + y + 1). \end{aligned}$$

Also ist $\mathsf{H}(f') = 3$ und sie ist damit echt größer als die Höhe von f. Im Gegensatz zum schweren Polyederspiel kann die Höhe im Golfspiel also steigen.

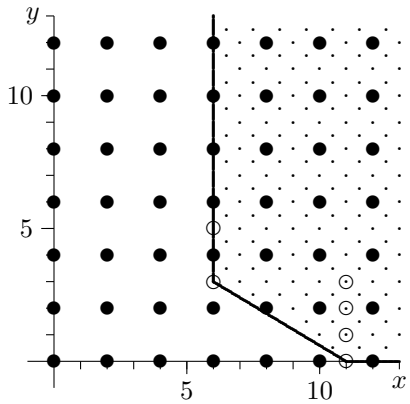


Abbildung 59 : Nach einem Spielzug im Golfspiel ist die Höhe gestiegen.

5.2.3 Monomiale Polyeder im Golfspiel

Auch im Golfspiel gibt es – wie im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ – spezielle Polyeder, die durch Koordinatenwechsel monomial werden, oder nach einem Spielzug monomial sind.

***Hilfssatz* 49 :** *Sei $f \in L_p$ eine gelochte Potenzreihe und seien $m \in \mathbb{N}, g \in \mathbb{F}[[x,y]]$ mit $g(0,0) \neq 0$ so, dass gilt:*

$$f(x,y) = cx^m y \cdot g(x,y) + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^k \text{ mit } c, c_k \in \mathbb{F}, c \neq 0 \neq c_k.$$

Dann gibt es einen Koordinatenwechsel ψ so, dass

$$l_p\big(\psi(f)\big) \in L_p \text{ monomial ist.}$$

Beweis. Der Beweis wird analog zum Beweis von Hilfssatz 8 geführt. ☺

Vergleiche den folgenden Hilfssatz mit Hilfssatz 9:

***Hilfssatz* 50 :** *Sei $f \in L_p$ eine gelochte Potenzreihe. Wir schreiben f in der Form*

$$f = \sum_{k=d}^{\infty} F_k,$$

wobei F_k homogene Polynome mit $\operatorname{grad}(F_k) = k$ sind. Sei $F_d \not\equiv 0$. Damit ist $d = \operatorname{ord}(f)$ und F_d die Initialform von f. Ist F_d ein Monom und $f'(x,y) := l_p\big(f(x, xy + tx)\big)$ mit $t \neq 0$ die Potenzreihe nach einem Spielzug im Golfspiel, dann gilt:

1. *Die Ordnung von f' als Potenzreihe nur in y ist kleiner oder gleich 1, also:*

$$\operatorname{ord}_y(f') \leq 1.$$

2. *Es gibt einen Koordinatenwechsel ψ so, dass $l_p\big(\psi(f')\big)$ eine monomiale Potenzreihe in L_p ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung besitzt f die Form

$$f(x,y) = cx^m y^n + \sum_{k=d+1}^{\infty} F_k,$$

mit $(m,n) \notin p \cdot \mathbb{N}^2$, da f eine gelochte Potenzreihe ist. Daher ist

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= l_p\left(cx^{m+n}y^n + \ldots + ct^n x^{m+n} + \sum_{k=d+1}^{\infty} F_k(x, yx + tx)\right) \\ &= l_p(cx^{m+n}y^n) + \ldots + l_p(cx^{m+n}yt^{n-1}) + l_p(cx^{m+n}t^n) + l_p\left(\sum_{k=d+1}^{\infty} F_k(x, yx + tx)\right). \end{aligned}$$

Ist $m + n \notin p \cdot \mathbb{N}$, so ist f' eine monomiale gelochte Potenzreihe und es gilt $\operatorname{ord}_y(f') = 0$. Ist hingegen $m + n \in p \cdot \mathbb{N}$, dann ist $l_p(cx^{m+n}t^n) = 0$, aber $l_p(cx^{m+n}yt^{n-1}) \neq 0$. Daher ist

$$f'(x,y) = cx^{m+n}y^n + \ldots + cx^{m+n}yt^{n-1} + l_p\left(\sum_{k=d+1}^{\infty} F_k(x, yx + tx)\right),$$

und es gilt $\operatorname{ord}_y(f') = 1$. Damit ist Punkt 1 gezeigt und f' erfüllt somit die Voraussetzungen von Hilfssatz 49, mit dem Punkt 2 folgt. ☺

5.2.4 Verhalten der Höhe im Golfspiel

Der letzte Hilfssatz hat die Vermutung bestätigt, die das Beispiel 48 nahe gelegt hat: Der kritische Fall, bei dem die Höhe steigt, kann nur dann auftreten, wenn die Initialform der Potenzreihe kein Monom ist. Aus den vorhergehenden Ergebnissen sehen wir auch, dass es einen Unterschied macht, ob der Grad der Potenzreihe ein Vielfaches von p ist oder nicht. Ist der Grad der Potenzreihe kein Vielfaches von p, so bleibt alles wie beim schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$. Ist dagegen der Grad der Potenzreihe ein Vielfaches von p, kann die Höhe steigen. Im Folgenden werden wir solche Situationen charakterisieren. Dazu betrachten wir das Verhalten von homogenen Polynomen unter speziellen linearen Koordinatenwechseln (vergleiche mit Hilfssatz 10).

***Hilfssatz* 51 :** *Sei $f \in L_p$ ein homogenes gelochtes Polynom der Form*

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i},$$

mit $m,n,a \in \mathbb{N}$ und $(m,n),(m+a,n-a) \notin p \cdot \mathbb{N}^2$, aber $m+n \in p \cdot \mathbb{N}$. Weiters sei $c_a \neq 0 \neq c_0$ und c_i so, dass $f(x,y) \in L_p$ ist. Damit ist $\mathsf{H}(f) = \mathsf{L}(f) = \mathsf{Stg}(f) = a$. Wir setzen für $t \in \mathbb{F}, t \neq 0$

$$g(x,y) := l_p\big(f(x,y+tx)\big) \in L_p.$$

Dann ist g ein gelochtes homogenes Polynom mit

$$\deg_y(g) \leq a+1.$$

Beweis. Dieses Ergebnis ist ein Spezialfall von einem Satz von Moh (siehe [18], Proposition 2, Seite 969 bzw. [13], Theorem 3, Seite 39). Im Folgenden reproduzieren wir den Beweis für diesen Spezialfall.

Wir können f wie folgt schreiben:

$$f(x,y) = x^m y^{n-a} \cdot \sum_{i=0}^{a} c_i x^i y^{a-i},$$

und setzen

$$u := \operatorname{ord}_y(g).$$

Ziel ist es, zu zeigen, dass $u \leq a+1$ ist. Dazu machen wir zwei Überlegungen, die uns gemeinsam die gewünschte Abschätzung für u liefern.

Erste Überlegung: Beachte, dass f von $x^m y^{n-a}$ geteilt wird. Daher ist

$$g \in x^m \langle y+tx \rangle^{n-a}.$$

Da weiters $n-a \notin p \cdot \mathbb{N}$ ist (weil $m+n \in p \cdot \mathbb{N}$ ist, aber $(m+a,n-a) \notin p \cdot \mathbb{N}^2$), gilt damit

$$\partial_y g \in x^m \langle y+tx \rangle^{n-a-1}.$$

Zweite Überlegung: Nach Definition ist $u = \operatorname{ord}_y(g)$ und damit gibt es ein Polynom P mit $P(0) \neq 0$ und

$$g(x,y) = P(x,y) \cdot y^u.$$

Da $u \notin p \cdot \mathbb{N}$ ist, gilt

$$\partial_y g = u y^{u-1} P(x,y) + y^u \partial_y P(x,y) \neq 0,$$

und es folgt

$$\partial_y g \in \langle y \rangle^{u-1}.$$

Mit den zwei obigen Überlegungen folgt:

$$\partial_y g \in \big(x^m \langle y+tx \rangle^{n-a-1} \cap \langle y \rangle^{u-1}\big),$$

also ist

$$\partial_y g \in \big(x^m \langle y + tx\rangle^{n-a-1} \cdot \langle y\rangle^{u-1}\big).$$

Dabei gilt die letzte Behauptung, da $t \neq 0$ ist. Da $\mathrm{ord}(g) = m + n$ und $\partial_y g \neq 0$ ist, folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} m + n - a - 1 + u - 1 &\leq m + n - 1 \\ -a + u - 1 &\leq 0 \\ u &\leq a + 1 = \mathsf{H}(f) + 1 \end{aligned}$$

☺

Es gibt tatsächlich eine Klasse von Polynomen, die die obere Schranke des Hilfssatzes realisieren. Das heißt, für ein homogenes Polynome f aus dieser Klasse gilt: $\mathrm{ord}_y(f') = \mathsf{H}(f) + 1$. In Abschnitt 5.3 beschreiben wir diese Klasse und zeigen, dass ihre Elemente in einem gewissen Sinn eindeutig sind.

Zuerst wollen wir jedoch das Golfspiel lösen. Dazu noch folgende wichtige Folgerung:

***Folgerung* 52 :** *Sei $f \in L_p$ eine gelochte Potenzreihe mit Höhe $\mathsf{H}(f)$ und f' die gelochte Potenzreihe nach einem Spielzug im Golfspiel. Dann ist die neue Höhe $\mathsf{H}(f')$ höchstens um 1 größer, als die alte Höhe $\mathsf{H}(f)$.*

Genauer: Sei $\mathsf{H}(f) = a$, $\mathrm{ord}(f) = d$ und

$$f'(x, y) = l_p\big(f(x, xy + tx)\big),$$

mit $t \in \mathbb{F}$.

1. *Ist die Ordnung d von f kein Vielfaches von p, also $\mathrm{ord}(f) \notin p \cdot \mathbb{N}$, so gilt*

$$\mathsf{H}(f') \leq a = \mathsf{H}(f).$$

2. *Ist die Ordnung d von f ein Vielfaches von p, also $\mathrm{ord}(f) \in p \cdot \mathbb{N}$, so gilt*

$$\mathsf{H}(f') \leq a + 1 = \mathsf{H}(f) + 1.$$

Beweis. Ist $t = 0$, so gilt immer $\mathsf{H}(f') \leq \mathsf{H}(f)$. Dies wurde bereits beim einfachen Polyederspiel gezeigt. Sei nun $t \neq 0$.

Punkt 1: Sei f_d die Initialform von f. Da $d \notin p \cdot \mathbb{N}$ ist, gilt $l_p(f_d) = f_d$. Die Behauptung entspricht damit der Aussage von Folgerung 13 und lässt sich auch ebenso beweisen.

Punkt 2: Hier ist der vorangegangene Hilfssatz wesentlich. Aus diesem folgt die Behauptung. (Vergleiche auch die Folgerung 13 auf Seite 41.) ☺

5.2.5 Lösung des Golfspiels

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe einer Bewertung inv bewiesen, dass das Kaninchen auch das Golfspiel gewinnt. (Dazu verwenden wir ähnliche Methoden wie beim schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$. Vergleiche also mit Abschnitt 3.6.) Im Folgenden sei f eine gelochte Potenzreihe in zwei Variablen und in fixen Koordinaten.

Definition : Sei $f \in \mathbb{F}[[x, y]]$. Die Potenzreihe f heißt nahe (bezüglich y), wenn $\mathrm{ord}_y(f) \leq 1$ ist. Ist $\mathrm{ord}_y(f) > 1$, so heißt f nicht nahe. (Analog definiert man nahe bzw. nicht nahe bezüglich x.)

Bemerkung : Die Begriffe nahe und nicht nahe unterscheiden sich von den Begriffen anliegend und nicht anliegend. Erstere übernehmen jedoch im Golfspiel die gleiche Rolle wie letztere im schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$.

Nun müssen wir noch die Definition der Höhe für nahe Polyeder geringfügig ändern.

Definition: Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine (bezüglich y) nahe Potenzreihe. Dann ist die Höhe $\mathsf{H}(f)$ im Folgenden definiert durch

$$\mathsf{H}(f) := \gamma_2,$$

wobei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ der Galionspunkt von f ist. (Analoge Definition für Potenzreihen, die bezüglich x nahe sind. Für nicht nahe Potenzreihen gilt weiter die bisherige Definition der Höhe.)

Bemerkung: Ist f eine nahe Potenzreihe, so kann die neu definierte Höhe größer sein als die „alte“ Höhe. Für $f(x,y) = x^2y^2 + x^3y$ gilt nun zum Beispiel $\mathsf{H}(f) = 2$ und nicht mehr $\mathsf{H}(f) = 1$.

Analog zum schweren Polyederspiel in $\mathbb{N}^2$ definieren wir die Menge I_f:

Definition: Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine Potenzreihe in gegebenen Koordinaten. Die Menge I_f enthalte alle gelochten Potenzreihen, die aus f durch einen Koordinatenwechsel hervorgehen, und für die Höhe und Länge minimal (in dieser Reihenfolge) sind und die Steigung maximal ist. In Zeichen: Sei W_f die Menge jener gelochten Potenzreihen, die aus f durch einen Koordinatenwechsel hervorgehen, also

$$W_f := \Big\{ l_p\big(\psi(f)\big) \ : \ \psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}[[x,y]]) \Big\}.$$

Nun definiere

$$I_f := \Big\{ g \in W_f \ : \ \big(\mathsf{H}(g), \mathsf{L}(g)\big) \leq_{\text{lex}} \big(\mathsf{H}(h), \mathsf{L}(h)\big) \text{ und } \mathsf{Stg}(g) \geq \mathsf{Stg}(h) \text{ für alle } h \in W_f \Big\},$$

wobei $<_{\text{lex}}$ die lexikographische Ordnung mit $(0,1) <_{\text{lex}} (1,0)$ sei.

Hilfssatz 53: *Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine gelochte Potenzreihe in gegebenen Koordinaten. Gibt es keinen Koordinatenwechsel $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}[[x,y]])$ so, dass $l_p\big(\varphi(f)\big)$ monomial ist, dann ist $I_f \neq \emptyset$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Hilfssatz 16. ☺

Definition: Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine gelochte Potenzreihe in gewählten Koordinaten und $g \in I_f$ (das heißt, $g = l_p\big(\psi(f)\big)$ und Höhe sowie Länge sind minimal, die Steigung ist maximal). Dann sei $\mathsf{inv} : L_p \to \mathbb{N}^2$ wie folgt definiert:

$$\mathsf{inv}(f) := \Big(\mathsf{H}(g), \mathsf{Stg}(g)\Big).$$

Ist inv eine Bewertung, dann gewinnt das Kaninchen das Golfspiel. Bevor dies bewiesen wird, noch einige Vorbereitungen.

Hilfssatz 54: *Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine gelochte Potenzreihe, $g \in I_f$ und $g' := g(x, yx)$. Es gelte weiters*

$$\mathsf{H}(g') = \mathsf{H}(g)$$

und $\mathsf{H}(g')$ und $\mathsf{L}(g')$ seien minimal (das heißt, $\mathsf{H}(g') \leq \mathsf{H}(h), \mathsf{L}(g') \leq \mathsf{L}(h)$ für alle $h \in W_{g'}$). Dann gilt:

$$g' \in I_{g'}.$$

Beweis. Analog zum Beweis von Hilfssatz 17. ☺

Definition: Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine gelochte Potenzreihe und $(f^m)_{m \in \mathbb{N}}$ die Folge der Spielzüge beim Golfspiel (zu gegebenen Strategien von Kaninchen und Hutmacher).

1. Die Folge der Spielzüge heißt stationär nahe, falls es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass f_m nahe ist für alle $m \geq m_0$.
2. Die Folge der Spielzüge heißt stationär nicht nahe, falls es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass f^m nicht nahe ist für alle $m \geq m_0$.

3. Die Folge der Spielzüge heißt alternierend, falls sie weder stationär nahe noch stationär nicht nahe ist.

Um zu zeigen, dass das Kaninchen das Golfspiel immer gewinnt, zeigen wir folgende Fälle:

1. Das Kaninchen gewinnt, wenn die Folge der Spielzüge stationär nicht nahe ist.
2. Das Kaninchen gewinnt, wenn die Folge der Spielzüge stationär nahe ist.
3. Das Kaninchen gewinnt, wenn die Folge der Spielzüge alternierend ist.

***Hilfssatz* 55 :** *Gegeben sei eine nicht nahe gelochte Potenzreihe f. Spielt der Hutmacher so, dass die Folge $(f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielzüge beim Golfspiel stationär nicht nahe ist, dann gewinnt das Kaninchen.*

Beweis. Ist inv eine Bewertung für die Menge der nicht nahen Potenzreihen, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 14. Um zu zeigen, dass die Funktion inv eine Bewertung für alle nicht nahen Potenzreihen ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \in I_f$ und $f'(x,y) = f(x, xy+tx)$, mit $t \in \mathbb{F}$. (Für $f'(x,y) = f(xy+ty, y)$ gelten die gleichen Überlegungen, wie im Folgenden. Allerdings muss man Höhe, Länge und Steigung bezüglich x betrachten.) Wir zeigen die Ungleichung:

$$\mathsf{inv}(f') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(f).$$

Ist $t = 0$, so folgt aus dem Hilfssatz 15 (einfaches Polyederspiel): Entweder ist

$$\mathsf{H}(f') < \mathsf{H}(f),$$

oder es ist

$$\mathsf{H}(f') = \mathsf{H}(f) \text{ und } \mathsf{Stg}f' < \mathsf{Stg}(f).$$

In beiden Fällen sind wir fertig. (Beachte, dass, wie im Beweis von Hilfssatz 15 Fall 1a gezeigt, aus $\mathsf{H}(f') = \mathsf{H}(f)$ auch $\mathsf{L}(f') = \mathsf{L}(f)$ folgt.) Nach Hilfssatz 54 ist $f' \in I_{f'}$ und damit ist

$$\mathsf{inv}(f') < \mathsf{inv}(f).$$

Sei nun $t \neq 0$. Weiters sei $\mathrm{ord}(f) = d$ und f_d die Initialform von f. Ist f_d ein Monom, dann ist f' bis auf einen Koordinatenwechsel monomial nach Hilfssatz 51 und wir sind fertig. Ist f_d kein Monom, dann ist

$$f_d(x,y) := \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i},$$

für gewisse $m, n \in \mathbb{N}$ mit $d = m + n$. Damit ist

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i} + F(x,y)$$

für ein $F \in \mathbb{F}[[x,y]]$ mit $\mathrm{ord}(F) > d$. Beachte dass $\mathsf{H}(f) \geq a$ ist. Folgerung 52 auf Seite 41 zeigt, dass für die Ecke $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2) := \gamma(f')$ gilt:

$$\gamma'_2 \leq a + 1 = \mathsf{H}(f) + 1.$$

Da f' nach Voraussetzung nicht nahe ist, gilt für die Ecke $\kappa' := \kappa(f') = (\kappa'_1, \kappa'_2)$:

$$\kappa'_2 \geq 2.$$

Damit folgt:

$$\mathsf{H}(f') = \gamma'_2 - \kappa' - 2 \leq a + 1 - 2 = \mathsf{H}(f) - 1.$$

Also gilt für $g' \in I_{f'}$:

$$\mathsf{H}(g') \leq \mathsf{H}(f') < \mathsf{H}(f),$$

und die Behauptung ist gezeigt. ☺

Folgender Hilfssatz dient als Vorbereitung für den Beweis, dass das Kaninchen gewinnt, wenn die Folge der Spielzüge stationär nahe ist.

***Hilfssatz* 56 :** *Sei $f \in L_p$ eine anliegende, gelochte Potenzreihe und $g \in I_f$. Sei weiters $d = \mathrm{ord}(g)$ und g_d die Initialform von g.*

1. *Ist $d \notin p \cdot \mathbb{N}$, dann folgt aus der Gleichung $\mathsf{L}(g) = \mathsf{Stg}(g)$ die Ungleichung:*

$$\mathsf{H}(g_d) = \mathsf{Stg}(g) = \mathsf{L}(g) \leq \mathsf{H}(g) - 1.$$

2. *Ist $d \in p \cdot \mathbb{N}$, dann folgt aus der Gleichung $\mathsf{L}(g) = \mathsf{Stg}(g)$ die Ungleichung:*

$$\mathsf{H}(g_d) = \mathsf{Stg}(g) = \mathsf{L}(g) \leq \mathsf{H}(g) - 2.$$

Beweis. Die Gleichung $\mathsf{H}(g_d) = \mathsf{Stg}(g) = \mathsf{L}(g)$ folgt aus der Definition von Höhe, Steigung und Länge (siehe Abbildung 29). Punkt 1 folgt aus Hilfssatz 19.

Für Punkt 2 sei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) g nahe bezüglich y, das heißt, $\mathrm{ord}_y(f) \leq 1$, und besitze die folgende Form.

$$g(x,y) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{a-i} + G(x,y),$$

mit $c_0 \neq 0$ und $\mathrm{ord}(G) > m + a$ und $\mathrm{ord}_x(G) \geq m$. Da $d \in p \cdot \mathbb{N}$ ist, ist $c_a = 0$ und es ist $\mathsf{H}(g_d) \leq \mathsf{H}(g) - 1$. Wir nehmen indirekt an, dass $\mathsf{H}(g) - 1 = \mathsf{H}(g_d)$ ist. Sei nun ψ der durch

$$\begin{aligned} x &\to x, \\ y &\to x + tx, \end{aligned}$$

gegebenen Koordinatenwechsel. Dann ist

$$\psi(g) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} (y + tx)^{a-i} + G(x, y + tx).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\psi(g)$ eine gelochte Potenzreihe (sonst betrachte $l_p(\psi(g))$). Wir schreiben $\psi(g)$ als:

$$\psi(g) = \sum_{i=0}^{a} c'_i x^{m+i} y^{a-i} + G'(x,y),$$

mit $\mathrm{ord}(G') > m + a$ und $\mathrm{ord}_x(G') > m + a + 1$. Da $\psi(g)$ eine gelochte Potenzreihe ist und $d = m + a \in p \cdot \mathbb{N}$ ist, ist $c'_a = 0$. Für c'_{a-1} gilt die Gleichung:

$$c'_{a-1}(t) = c_{a-1} + c_{a-2}\binom{2}{1}t + c_{a-3}\binom{3}{1}t^2 + \ldots + c_1\binom{a-1}{1}t^{a-2} + c_0\binom{a}{1}t^{a-1}.$$

Da nach Voraussetzung $\mathbb{F}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $t \in \mathbb{F}$ so, dass $c'_{a-1}(t) = 0$ ist. Für dieses t gilt dann aber:

$$\widetilde{g} := \psi(g) = c'_{a-2} x^{m+a-1} y + c'_{a-2} x^{m+a-2} y^2 + \ldots.$$

Daraus folgt für $\widetilde{g}_d$, die Initialform von $\widetilde{g}$:

$$\mathsf{L}(\widetilde{g}) < \mathsf{L}(g).$$

Dies ist ein Widerspruch zu $g \in I_f$. ☺

***Hilfssatz* 57 :** *Gegeben sei eine nahe gelochte Potenzreihe f. Spielt der Hutmacher so, dass die Folge f^m der Spielzüge beim Golfspiel stationär nahe ist, dann gewinnt das Kaninchen.*

Beweis. Ist inv eine Bewertung für die Menge der nahen gelochten Potenzreihen, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 14. Um zu zeigen, dass die Funktion inv eine Bewertung für alle nahen gelochten Potenzreihen ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \in I_f$ und $f'(x,y) := l_p\big(f(x, xy+tx)\big)$, mit $t \in \mathbb{F}$. (Für $f'(x,y) = f(xy+ty, y)$ gelten die gleichen Überlegungen wie im Folgenden. Allerdings ist dann f' nahe bezüglich x.)Wir zeigen die Ungleichung:

$$\mathsf{inv}(f') <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(f).$$

Ist $t = 0$, so zeigt man die Behauptung wie in Hilfssatz 55.

Sei also $t \neq 0$. Weiters sei $\text{ord}(f) = d$ und f_d die Initialform von f. Ist f_d ein Monom, dann ist $\text{ord}_y(f') \leq 1$ nach Hilfssatz 50 und es gibt einen Koordinatenwechsel ψ, so dass $l_p\big(\psi(f')\big)$ monomial ist. Damit sind wir fertig. Ist f_d kein Monom, dann ist nach dem vorherigen Hilfssatz 56 $\mathsf{H}(f_d) \leq \mathsf{H}(f) - 2$, das heißt

$$\mathsf{H}(f_d) < \mathsf{H}(f) - 1.$$

Nach Folgerung 52 gilt aber auch $\mathsf{H}(f') \leq \mathsf{H}(f_d) + 1$. Also gilt für $g' \in I_{f'}$:

$$\mathsf{H}(g') \leq \mathsf{H}(f') \leq \mathsf{H}(f_d) + 1 < \mathsf{H}(f) - 1 + 1 = \mathsf{H}(f),$$

und die Behauptung ist gezeigt. ☺

Bei stationären Spielfolgen gewinnt also das Kaninchen. Doch es bleibt auch bei alternierenden Spielfolgen Sieger. Folgender Hilfssatz dient als Vorbereitung, um dies zu zeigen.

***Hilfssatz* 58 :** *Sei f eine nahe gelochte Potenzreihe und f' die Potenzreihe nach einem Spielzug im schweren Polyederspiel. Ist f' nicht nahe, dann ist*

$$\mathsf{H}(f') < \mathsf{H}(f) - 1 \text{ } \textit{oder } \mathsf{H}(f') = 1.$$

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \in I_f$ und f nahe bezüglich y. Damit ist f' nur dann nicht nahe, wenn

$$f'(x,y) = f(xy + tx, y)$$

ist. (Die Potenzreihe $f(x, yx)$ wäre wieder nahe, und $f(x, yx + tx)$ muss nahe sein, da sonst $f(x, y + tx)$ eine kleinere Höhe als f hätte, im Widerspruch zu $f \in I_f$.)

Sei $t = 0$. Ist $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ der Galionspunkt von f, dann ist $\mathsf{H}(f) = \gamma_2$ und für den Galionspunkt γ' von f' gilt:

$$\gamma' = (\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2).$$

Sei weiters κ der Kielpunkt von f. Ist f' nicht monomial, gibt es eine Ecke $e \neq \gamma$ von f so, dass $(e_1, e_1 + e_2)$ der Kielpunkt von f' ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Ist $e \neq (\gamma_1 + 1, 0)$, dann ist entweder $e_2 = 0$ und $e_1 \geq \gamma_1 + 2$ und damit

$$\mathsf{H}(f') = \gamma'_2 - \kappa'_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - (e_1 + e_2) \leq \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1 - 2 < \gamma_2 - 1 = \mathsf{H}(f) - 1.$$

Oder es ist $e_2 \geq 1, e_1 \geq \gamma_1 + 1$ und damit

$$\mathsf{H}(f') = \gamma'_2 - \kappa'_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - (e_1 + e_2) \leq \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1 - 1 - 1 < \gamma_2 - 1 = \mathsf{H}(f) - 1.$$

Die Behauptung folgt.

Sei andererseits $e = (\gamma_1 + 1, 0)$. Beachte, dass $\gamma_1 \geq 2$ ist, da sonst f' nahe bezüglich x ist, im Widerspruch zur Annahme. Weiters besitzt f nur die zwei Ecken (γ_1, γ_2) und e. Diese gehen über in der zwei Ecken $(\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2)$ und $(\gamma_1 + 1, \gamma_1 + 1)$ von f'. Misst man nun die Höhe von f' bezüglich x, dann gilt:

$$\mathsf{H}(f') = \gamma_1 + 1 - \gamma_1 = 1.$$

Wieder folgt die Behauptung. (Beachte, dass damit auch $\mathsf{H}(f') < \mathsf{H}(f) - 1$ ist, falls $\mathsf{H}(f) > 2$ ist.)

Sei nun $t \neq 0$ und γ' der Galionspunkt von f' bezüglich x. Dann gilt nach Hilfssatz 51

$$\gamma'_1 \leq \mathsf{H}(f) + 1.$$

(Beachte, dass die Höhe von f bezüglich y gemessen wird.) Da f' nach Voraussetzung nicht nahe ist, gilt für den Kielpunkt κ' (bezüglich x) von f':

$$\kappa'_1 \geq 2.$$

Insgesamt folgt die Behauptung, denn es gilt:

$$\mathsf{H}(f') = \gamma'_1 - \kappa'_1 \leq \mathsf{H}(f) + 1 - 2 < \mathsf{H}(f).$$

(Beachte, dass die Höhe von f bezüglich y, die Höhe von f' aber bezüglich x gemessen wird.) ☺

***Hilfssatz* 59 :** *Gegeben sei eine gelochte Potenzreihe f. Spielt der Hutmacher so, dass die Folge $(f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielzüge beim Golfspiel alternierend ist, dann gewinnt das Kaninchen.*

Beweis. Betrachte die Teilfolge $(f^{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ der nahen Potenzreihen des Spiels, das heißt, $(f^{\nu(m)})$ ist nahe für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{inv}(f^{\nu(m)}) <_{\text{lex}} \mathsf{inv}(f^{\nu(m+1)}).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Sei $f^{\nu(m)} = f^n$ und $f^{\nu(m+1)} = f^{n+l}$. (Beachte, dass beide Potenzreihen nach Voraussetzung nahe sind.) Ist $l = 1$, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 57. Ist $l > 1$, so gilt für alle $0 < k < l$, dass f^{n+k} nicht nahe ist. Nach Hilfssatz 13 gilt für alle $0 < k < l$ die Ungleichung

$$\mathsf{H}(f^{n+l}) \leq \mathsf{H}(f^{n+k}) + 1.$$

Weiters gilt nach Hilfssatz 58 für alle $0 < k < l$ die Ungleichung

$$\mathsf{H}(f^{n+k}) < \mathsf{H}(f^n) - 1 \text{ oder } \mathsf{H}(f^{n+k}) = 1.$$

Gilt die Ungleichung $\mathsf{H}(f^{n+k}) < \mathsf{H}(f^n) - 1$, folgt die Behauptung, denn es ist:

$$\mathsf{H}(f^{\nu(m+1)}) = \mathsf{H}(f^{n+l}) \leq \mathsf{H}(f^{n+k}) + 1 < \mathsf{H}(f^n) - 1 + 1 = \mathsf{H}(f^{\nu(m)}).$$

Ist andererseits $\mathsf{H}(f^{n+k}) = 1$, so besitzt f^n eine besondere Gestalt, wie im Beweis von Hilfssatz 58 gezeigt: Die gelochte Potenzreihe f^n besitzt zwei Ecken der Form $(\gamma_1, 2)$ und $(\gamma_1 + 1, 0)$. Beachte, dass dieser Fall nicht auftreten kann, wenn $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$ ist. Da f^{n+1} nach Voraussetzung nicht nahe ist, gilt (vergleiche auch die Argumente im Beweis von Hilfssatz 58):

$$f^{n+1}(x, y) = f^n(xy, x).$$

Damit besitzt f^{n+1} die zwei Ecken $(\gamma_1, \gamma_1 + 2)$ und $(\gamma_1 + 1, \gamma_1 + 1)$. Damit ist $\mathrm{ord}(f^{n+1}) = 2 \cdot (\gamma_1 + 1) \neq p$ für jede Primzahl $p \neq 2$. Weiters ist $\mathsf{H}(f^{n+1}) = \mathsf{L}(f^{n+1}) = \mathsf{Stg}(f^{n+1}) = 1$. Spielt nun der Hutmacher bei seinem nächsten Spielzug $j \in \{1, 2\}$ und $t = 0$, so ist f^{n+2} monomial. Für $t \neq 0$ ist, da $\mathrm{ord}(f^{n+1}) \notin p \cdot \mathbb{N}$ ist, $\mathsf{H}(f^{n+2}) \leq 1$ nach Hilfssatz 51. Damit ist f^{n+2} bis auf einen Koordinatenwechsel monomial nach Hilfssatz 49 und wir sind fertig. ☺

Damit können wir folgenden Satz als Hauptergebnis dieses Abschnittes formulieren.

***Satz* 60 :** *Es gibt eine Gewinnstrategie des Kaninchens für das Golfspiel.*

Beweis. Wir betrachten für eine gegebene Strategie des Hutmachers die Folge $(f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Spielzüge. Ist diese stationär nicht nahe bzw. stationär nahe, so folgt die Behauptung aus dem Hilfssatz 57 bzw. Hilfssatz 55. Ist sie hingegen alternierend, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 59. ☺

5.3 Hydra Polynome

Der Hilfssatz 51 hat uns gezeigt, dass die Höhe beim Golfspiel höchstens um 1 steigen kann. Ein Beispiel hat gezeigt, dass es solche Polynome auch tatsächlich gibt. Da das Ziel im Golfspiel ist,

die Höhe kontinuierlich auf 0 zu senken, ist ein Ansteigen der Höhe ein schwerer Rückschlag. So einen Rückschlag hatte auch Herkules, als er der mehrköpfigen Hydra einen Kopf abschlug, und dann zwei neue Köpfe nachwuchsen. Daher wollen wir Potenzreihen, bei denen nach einem Spielzug im Golfspiel die Höhe steigt „Hydra Potenzreihen“ nennen.

Definition: Sei $f \in \mathbb{F}[[x,y]]$ eine gelochte Potenzreihe und f' die Potenzreihe nach einem Zug beim Golfspiel. Gilt $\mathsf{H}(f') > \mathsf{H}(f)$, so nennen wir f eine Hydra Potenzreihe. Den zu f gehörenden Newton Polyeder nennen wir Polyhydra.

Genauer: Wir nennen die gelochte Potenzreihe f eine Hydra Potenzreihe (bzw. Hydra Polynom, wenn $f \in \mathbb{F}[x,y]$ ist), wenn für

$$f'(x,y) := l_p\big(f(x, xy+tx)\big)$$

(oder für $f'(x,y) := l_p\big(f(xy+ty, y)\big)$) gilt:

$$\mathsf{H}(f') > \mathsf{H}(f).$$

In diesem Abschnitt werden Hydra Potenzreihen über ihre Initialform charakterisiert. Dazu betrachten wir gelochte homogene Polynome unter speziellen linearen Koordinatenwechseln.

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik p und $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m+n \in p\cdot\mathbb{N}$, aber $(m,n) \notin p\cdot\mathbb{N}^2$. Sei weiters $f \in L_p$ ein gelochtes homogenes Polynom der Form

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i},$$

mit a so, dass $(m+a, n-a) \notin p\cdot\mathbb{N}^2$ ist. Weiters seien $c_a \neq 0 \neq c_0$ und c_i so, dass $f(x,y) \in L_p$ und $\mathsf{H}(f) = a$ ist. Sei nun

$$g(x,y) := l_p\big(f(x, y+tx)\big),$$

mit $t \in \mathbb{F}, t \neq 0$. Wir suchen $c_0, \ldots, c_a \in \mathbb{F}$ so, dass $\operatorname{ord}_y(g) = a+1 = \mathsf{H}(f)+1$ ist.

Früher (im Beweis von Hilfssatz 10) erhielten wir für $d_0, d_1, \ldots, d_a$, die ersten a Koeffizienten von $f(x, y+tx)$, die Gleichung

$$B_{n,a} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 t^{-1} \\ \vdots \\ c_a t^{-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_a \end{pmatrix}.$$

Es ist $\operatorname{ord}_y(g) = a+1$, wenn alle d_i gleich 0 sind. Da die Binomialmatrix invertierbar ist, ist dies jedoch nicht möglich. Da wir jedoch $l_p(f(x, y+tx) = g(x,y))$ betrachten, fallen noch weitere Monome weg und $\operatorname{ord}_y(g) = a+1$ wird möglich. Genauer: Die Koeffizienten $d_0, d_p, d_{2p}, \ldots$ können beliebig gewählt werden (nur einer muss ungleich 0 sein), da diese Koeffizienten ja durch die Anwendung von l_p wegfallen (in ein Loch fallen). Es bleibt, folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$B_{n,a} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 t^{-1} \\ \vdots \\ c_a t^{-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_p \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Dabei steht δ für 0, falls $a \notin p\cdot\mathbb{N}$ ist, sonst für $d_{kp} = d_a$. Durch die Inverse der Binomialmatrix

kann die Lösung sofort angegeben werden:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 t^{-1} \\ \vdots \\ c_a t^{-a} \end{pmatrix} = D_{n,a} \cdot C_{n,a} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_p \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \end{pmatrix},$$

mit $D_{n,a}$ und $C_{n,a}$ wie im Hilfssatz 12 angegeben.

Nun sollen noch Bedingungen an n und a angegeben werden, die erfüllt sein müssen, damit $\mathrm{ord}_y(g) = a + 1$ gilt.

Definition : Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnen wir mit $\overline{n}$ den nicht negativen Rest von n bei Division durch p. Das heißt, es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

$$n = l \cdot p + \overline{n} \text{ mit } 0 \leq \overline{n} < p.$$

***Hilfssatz* 61 :** *Sei $f \in L_p$ ein homogenes gelochtes Polynom der Form*

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i},$$

mit m, n, a wie oben angegeben. Ist

$$\overline{n} < \overline{a},$$

dann ist f ein Hydra Polynom.

Genauer: Für $t \neq 0$ gilt:

$$\mathrm{ord}_y \left(l_p\big(f(x, y + tx)\big) \right) \leq a.$$

Es gibt also kein $t \in \mathbb{F}$ so, dass $\mathrm{ord}_y \left(l_p\big(f(x, y + tx)\big) \right) = a + 1$ *ist.*

Beweis. Angenommen, es gibt ein $t \neq 0$ so, dass $\mathrm{ord}_y \left(l_p\big(f(x, y + tx)\big) \right) = a + 1$ ist. Dann gilt für die Koeffizienten von f folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 t^{-1} \\ \vdots \\ c_a t^{-a} \end{pmatrix} = D_{n,a} \cdot C_{n,a} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_p \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Ist $a = kp + \overline{a}$, dann lautet die letzte Zeile dieses Gleichungssystems (siehe die inverse Binomialmatrix aus Hilfssatz 12):

$$c_a t^{-a} = (-1)^a \binom{a}{a} \cdot \left((-1)^a \binom{n}{a} d_0 + (-1)^{a-p} \binom{n-p}{a-p} d_p + \ldots + (-1)^{a-kp} \binom{n-kp}{a-kp} d_{kp} \right).$$

Da aber $\overline{n} < \overline{a}$ ist, gilt nach dem folgenden Hilfssatz 62 für alle $0 \leq j \leq k$:

$$\binom{n-jp}{a-jp} \in p \cdot \mathbb{N}.$$

Da $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p$ ist, gilt daher $\binom{n-jp}{a-jp} = 0$ für alle j. Damit ist $c_a = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $c_a \neq 0$. ☺

***Hilfssatz* 62 :** *Seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n, a \in \mathbb{N}, a \leq n$. Aus*

$$\overline{n} < \overline{a} \qquad \textit{folgt} \qquad \binom{n}{a} \in p \cdot \mathbb{N}.$$

Beweis. Für n und a gibt es $l, k \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} n &= lp + \overline{n} \qquad \text{mit } \overline{n} < p, \\ a &= kp + \overline{a} \qquad \text{mit } \overline{a} < p. \end{aligned}$$

Weiters gibt es $N, A, \nu, \alpha \in \mathbb{N}, N, A \notin p \cdot \mathbb{N}$ mit

$$\binom{n}{a} = \frac{n(n-1)\cdots(n-a+1)}{a(a-1)\cdots 1} = \frac{N \cdot p^{\nu}}{A \cdot p^{\alpha}}.$$

Da $\binom{n}{a} \in \mathbb{N}$ ist, ist $\nu \geq \alpha$. Die Behauptung folgt, falls $\nu > \alpha$ ist. Das Produkt $n(n-1)\cdots(n-a+1)$ muss also mehr Vielfache von p enthalten, als das Produkt $a(a-1)\cdots 1$. Anschaulich ist dies klar, wenn man die Zahlengerade betrachtet: Da $\overline{n} < \overline{a}$ ist, liegen auf der Strecke zwischen $n-a+1$ und n mehr Vielfache von p, als auf der Strecke zwischen 1 und a (siehe Abbildung 60).

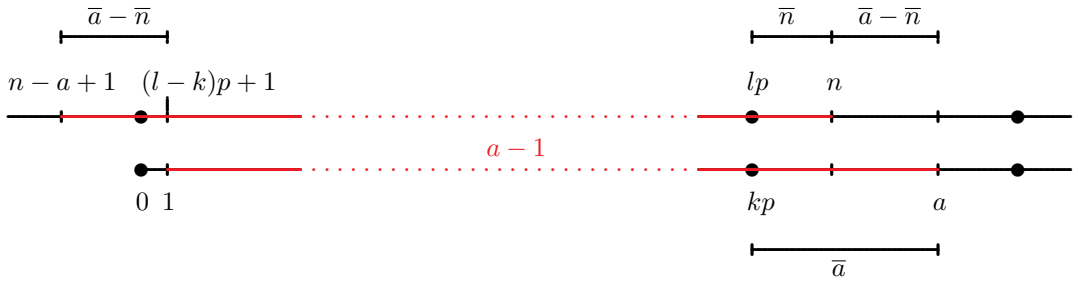


Abbildung 60 : Auf der Strecke zwischen $n-a+1$ und n liegen mehr Vielfache von p (die dicken Punkte), als auf der Strecke zwischen 1 und a.

Nun zum Beweis: Es ist

$$\binom{n}{a} = \frac{}{(kp+\overline{a})\cdots\underbrace{(kp+\overline{n}+1)}_{kp+\overline{a}-(\overline{a}-\overline{n})+1}} \cdot \frac{lp+\overline{n}}{kp+\overline{n}} \cdot \frac{\cdots}{\cdots} \cdot \frac{\overbrace{(l-k)p+1}^{lp+\overline{n}-(kp+\overline{n}-1)}}{1} \cdot \frac{(l-k)p\cdots((l-k)p-\overline{a}+\overline{n}+1)}{}$$

Setze nun

$$\begin{aligned} O &:= (kp+\overline{a})\cdots(kp+\overline{n}+1), \\ U &:= (l-k)p\cdots((l-k)p-\overline{a}+\overline{n}+1). \end{aligned}$$

Beachte, dass O genau $\overline{a}-\overline{n}$ Faktoren $o_1, \ldots, o_{\overline{a}-\overline{n}}$ besitzt und dass p kein o_i teilt. Auch U besitzt $\overline{a}-\overline{n}$ Faktoren $u_1 := (l-k)p, \ldots, u_{\overline{a}-\overline{n}} := (l-k)p-\overline{a}+\overline{n}+1$. Wir ersetzen nun die Multiplikanden u_i durch

$$u_i' := u_i + (kp+\overline{a})$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} u_1' &= (l-k)p + kp + \overline{a} = lp + \overline{a}, \\ &\vdots \\ u_{\overline{a}-\overline{n}}' &= (l-k)p - \overline{a} + \overline{n} + 1 + kp + \overline{a} = lp + \overline{n} + 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{lp+\overline{a}}{kp+\overline{a}} \cdot \frac{\cdots}{\cdots} \cdot \frac{lp+\overline{n}+1}{kp+\overline{n}+1} \cdot \frac{lp+\overline{n}}{kp+\overline{n}} \cdot \frac{\cdots}{\cdots} \cdot \frac{(l-k)p+1}{1} = \binom{u_1'}{a} = \frac{N' \cdot p^{\nu'}}{A \cdot p^{\alpha}}$$

mit $N', \nu' \in \mathbb{N}, N' \notin p \cdot \mathbb{N}$. Da $\binom{u_1'}{a} \in \mathbb{N}$ ist, gilt wieder $\nu' \geq \alpha$. Beachte nun, dass p kein u_i' teilt. Aber p teilt $u_1 = (k-l)p$. Daher ist

$$\alpha \leq \nu' < \nu \qquad \text{also,} \qquad \nu - \alpha > 0.$$

Das heißt aber:

$$p \qquad \text{teilt} \qquad \binom{n}{a} = \frac{N}{A} \cdot p^{\nu - \alpha}.$$

Die Behauptung folgt. ☺

Im Folgenden sei

$$r := m \text{ und } s := n - a.$$

Damit lautet Hilfssatz 61:

***Hilfssatz* 63 :** *Sei $f \in L_p$ ein homogenes, gelochtes Polynom der Form*

$$f(x,y) = x^r y^s \cdot \sum_{i=0}^{a} c_i x^i y^{a-i},$$

mit $r, s, a \in \mathbb{N}, r + s + a \in p \cdot \mathbb{N}$ und $c_0, c_a \neq 0$. Ist

$$\overline{r} + \overline{s} > p,$$

so gilt für jedes $t \neq 0$

$$\operatorname{ord}_y \Big(l_p\big(f(x, y+tx)\big)\Big) \leq a.$$

Es gibt also kein $t \neq 0$ so, dass $\operatorname{ord}_p(l_p(f(x,y+tx))) = a+1$ ist.

Beweis. Wir können den Hilfssatz 61 verwenden. Dort ist

$$r = m \text{ und } s = n - a.$$

Dabei folgte die Behauptung, falls $\overline{n} < \overline{a}$ gilt. Diese Bedingung rechnen wir in die Form $\overline{r} + \overline{s} > p$ um.

Beachte, dass $\overline{r} = \overline{m}$ und $\overline{s} = \overline{n-a}$ ist.

Erste Überlegung: Es ist

$$\overline{m+n} = \overline{\overline{m} + \overline{n}} = 0.$$

Da $0 < \overline{m}, \overline{n} < p$ gilt, folgt $\overline{m} + \overline{n} = p$, also

$$\overline{r} = \overline{m} = p - \overline{n}.$$

Zweite Überlegung: Es ist

$$\overline{n-a} = \overline{\overline{n} - \overline{a}}.$$

Daher ist $\overline{n-a} - (\overline{n} - \overline{a}) \in p \cdot \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist $0 < \overline{a} - \overline{n} < p$. Mit $0 \leq \overline{n-a} < p$ folgt $\overline{n-a} + \overline{a} - \overline{n} = p$, also

$$\overline{s} = p - \overline{a} + \overline{n}.$$

Folgerung: Insgesamt gilt damit (da $\overline{a} < p$ ist), wie behauptet:

$$\overline{r} + \overline{s} = p - \overline{n} + p - \overline{a} + \overline{n} = 2p - \overline{a} > p.$$

☺

Herwig Hauser hat in seiner Arbeit [13] alle homogenen, gelochten Polynome angegeben, bei denen $\operatorname{ord}_y \Big(l_p\big(f(x, y+tx)\big)\Big) = \mathsf{H}(f) + 1$ gilt.

***Satz* 64 :** *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik p. Ein $f \in L_p$ mit $\operatorname{ord}(f) = d$ und Initialform f_d ist genau dann eine Hydra Potenzreihe, wenn gilt:*

frosch

$$f_d(x,y) = l_p\big(cx^r y^s \cdot \sum_{i=0}^{a} \binom{a+s}{i+s} y^i (tx-y)^{a-i}\big) =: \mathbb{H}_{r,s,a},$$

mit $c \in \mathbb{F}, r, s, a \in \mathbb{N}$ und weiters:

$$\begin{gathered}\mathsf{H}(f) = \mathsf{L}(f) = \mathsf{Stg}(f) = \mathsf{H}(f_d),\\ r+s+a \in p\cdot\mathbb{N},\\ \overline{r}+\overline{s} \le p.\end{gathered}$$

Beweis. Für den Beweis genügt es, die Initialform f_d zu betrachten.

1. Eine Potenzreihe mit den obigen Eigenschaften ist eine Hydra Potenzreihe. Dies folgt aus der Gleichung

$$\operatorname{ord}_y\big(f_d(x,y+tx)\big) = \mathsf{H}(f_d)+1 = \mathsf{H}(f)+1,$$

die sich leicht nachrechnen lässt:

$$\begin{aligned}
& cx^r(y+tx)^s \cdot \sum_{i=0}^{a}\binom{a+s}{i+s}(y+tx)^i(-y)^{a-i}\\
= \;& cx^r \cdot \sum_{i=0}^{a}\binom{a+s}{i+s}(y+tx)^{i+s}(-y)^{a-i}\\
= \;& cx^r \cdot \sum_{i=s}^{a+s}\binom{a+s}{i}(y+tx)^{i}(-y)^{a+s-i}\\
= \;& cx^r \cdot \sum_{i=0}^{a+s}\binom{a+s}{i}(y+tx)^{i}(-y)^{a+s-i} - cx^r \cdot \sum_{i=0}^{s-1}\binom{a+s}{i}(y+tx)^{i}(-y)^{a+s-i}\\
= \;& cx^r\cdot(y+tx-y)^{a+s} - cx^r(-y)^{a+1}\cdot\sum_{i=0}^{s-1}\binom{a+s}{i}(y+tx)^i(-y)^{s-1-i}\\
= \;& ct^{a+s}x^{r+s+a} - cx^r(-y)^{a+1}\cdot\sum_{i=0}^{s-1}\binom{a+s}{i}(y+tx)^i(-y)^{s-1-i}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
l_p(f_d(x,y+tx)) &= l_p(ct^{a+s}x^{r+s+a}) - l_p\Big(cx^r(-y)^{a+1}\cdot\sum_{i=0}^{s-1}\binom{a+s}{i}(y+tx)^i(-y)^{s-1-i}\Big)\\
&= -l_p\Big(cx^r(-y)^{a+1}\cdot\sum_{i=0}^{s-1}\binom{a+s}{i}(y+tx)^i(-y)^{s-1-i}\Big)
\end{aligned}$$

und es ist klar (mit dem Satz von Moh), dass $\operatorname{ord}_y\Big(l_p\big(f_d(x,y+tx)\big)\Big) = a+1 = \mathsf{H}(f)+1$ ist.

2. Sei nun f eine Hydra Potenzreihe. Wir zeigen, dass ihre Initialform f_d die im Satz behauptete Gestalt besitzt: Wegen Hilfssatz 10 und Hilfssatz 63 besitzt die Initialform $f_d(x,y) \in L_p$ die Form

$$f_d(x,y) = \sum_{i=0}^{a} c_i x^{m+i} y^{n-i},$$

mit $m+n \in p\cdot\mathbb{N}$, aber $(m,n) \notin p\cdot\mathbb{N}^2$ und a so, dass $(m+a, n-a) \notin p\cdot\mathbb{N}$. Weiters seien $c_a \neq 0 \neq c_0$ und c_i so, dass $f(x,y) \in L_p$ ist. Definiere nun $F \in \mathbb{F}[x,y,z]$ wie folgt:

$$F(x,y,z) := z^p + f_d(x,y).$$

Sei $b := \frac{m+n}{p}$. Nun betrachte

$$G(x,y,z) := F(x, y+tx, z + \sum_{i=0}^{e} d_i x^{b-i} y^i)$$

mit $e \in \mathbb{N}$ so, dass $p(b-e) \leq m < p(b-e+1)$ ist. Setze unbestimmt

$$G(x,y,z) = k_z z^p + \sum_{i=0}^{n} k_i x^{m+n-i} y^i.$$

Ein einfache Rechnung ergibt für die ersten a Koeffizienten von G und den Koeffizienten k_z von z^p das Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{0} & d_0^p \\ \binom{n}{1} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{p-1} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{p-1} & 0 \\ \binom{n}{p} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{p} & d_1^p \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{a} & \cdots & \cdots & \binom{n-a}{a} & \delta \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=C} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 t^{-1} \\ \vdots \\ c_a t^{-a} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_{a-1} \\ k_a \\ k_z \end{pmatrix}.$$

(Dabei ist $\delta = 0$, wenn $a \in p \cdot \mathbb{N}$ ist. Sonst steht δ für $d_{kp} = d_a$.) Wir können die Parameter $d_0, d_1, \ldots$ so wählen, dass

$$G(x,y,z) = z^p + g(x,y) \text{ mit } g(x,y) \in L_p$$

ist. Beachte weiters, dass die Matrix C eine Block-Dreiecksmatrix mit den Blöcken B (die Matrix von Hilfssatz 11) und 1 ist. Da die Matrix B nach Hilfssatz 11 invertierbar ist, ist auch die Matrix C invertierbar. Dies beweist die Eindeutigkeit der Koeffizienten c_i, da $\mathbb{H}$ nach Annahme eine Hydra Potenzreihe ist. ☺

Ist $a = \mathsf{H}(f)$ ein Vielfaches von p, könne Hydra Polynome auch noch anders angegeben werden, wie der nächste Hilfssatz zeigt.

Hilfssatz: *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik p. Ein $f \in L_p$ mit* $\operatorname{ord}(f) = d$, *Initialform f_d und $\mathsf{H}(f) = a \in p \cdot \mathbb{N}$ ist genau dann eine Hydra Potenzreihe, wenn gilt:*

$$f_d(x,y) = l_p\big(cx^m y^{n-a}(y-tx)^a\big),$$

mit $c \in \mathbb{F}, r, s, a \in \mathbb{N}$ und weiters:

$$r + s + a \in p \cdot \mathbb{N},$$
$$\mathsf{H}(f) = \mathsf{L}(f) = \mathsf{Stg}(f) = \mathsf{H}(f_d) = a \in p \cdot \mathbb{N}.$$

(Damit ist $r + s \in p \cdot \mathbb{N}$ und daher $\overline{r} + \overline{s} = 0 \leq p$.)

Beweis. 1. Eine Potenzreihe mit den obigen Eigenschaften ist eine Hydra Potenzreihe. Dies folgt aus der Inversen der Binomialmatrix, oder durch Nachrechnen:

$$f_d(x, y+tx) = l_p\big(cx^m(y+tx)^{n-a}y^a\big) = c \cdot l_p\big(t^{n-a}x^{m+n-a}y^a + h(x,y)\big)$$

mit $\operatorname{ord}_y(h) \geq a+1$. Um g zu erhalten, muss noch l_p angewendet werden. Beachte, dass dann $x^{m+n-a}y^a$ in ein Loch „fällt“, das heißt, $l_p(x^{m+n-a}y^a) = 0$. Es ist:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= l_p\big(f_d(x,y+tx)\big) \\ &= l_p\big(cx^m(y+tx)^{n-a}y^a\big) \\ &= c\Big(l_p(t^{n-a}x^{m+n-a}y^a) + l_p\big(h(x,y)\big)\Big) \\ &= c \cdot l_p\big(h(x,y)\big). \end{aligned}$$

Da $\mathrm{ord}_y(h) \geq a+1$ ist, ist auch $\mathrm{ord}(g) \geq a+1$. Weiters ist, nach dem Satz von Moh, $\mathrm{ord}_y(g) \leq a+1$. Damit ist $\mathrm{ord}_y(g) = a+1$.

2. Sei nun f eine Hydra Potenzreihe mit $\mathsf{H}(f) = a \in p \cdot \mathbb{N}$. Der Beweis, dass ihre Initialform f_d die im Satz behauptete Gestalt besitzt, folgt wie im Beweis von Satz 64. ☺

5.3.1 Beispiele

Im Folgenden einige Beispiele für Hydra Polynome:

Beispiel : Sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit Charkteristik 2:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= l_2\big(xy(y+x)^2\big) = xy^3 + x^3y &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_1) = 2 \\ g_1(x,y) &= l_2\big(f_1(x,y+x)\big) = xy^3 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_1) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x,y) &= l_2\big(x^7y^3(y+x)^2\big) = x^7y^5 + x^9y^3 &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_2) = 2 \\ g_2(x,y) &= l_2\big(f_2(x,y+x)\big) = x^7y^5 + x^9y^3 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_2) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(x,y) &= l_2\big(x^3y^5(y+x)^4\big) = x^3y^9 + x^7y^5 &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_3) = 4 \\ g_3g(x,y) &= l_2\big(f_3(x,y+x)\big) = x^3y^9 + x^7y^5 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_3) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(x,y) &= l_2\big(xy^{11}(y+x)^6\big) = xy^{17} + x^3y^{15} + x^5y^{13} + x^7y^{11} &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_4) = 6 \\ g_4(x,y) &= l_2\big(f_4(x,y+x)\big) = xy^{17} + x^3y^{15} + x^9y^9 + x^{11}y^7 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_4) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5(x,y) &= l_2\big(x^5y^{13}(y+x)^8\big) = x^5y^{21} + x^{13}y^{13} &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_5) = 8 \\ g_5(x,y) &= l_2\big(f_5(x,y+x)\big) = x^5y^{21} + x^9y^{17} + x^{13}y^{13} + x^{17}y^9 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_5) = 9 \end{aligned}$$

Beispiel : Sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit Charakteristik 3:

$$\begin{aligned} f_6(x,y) &= l_3\big(x^2y(y-x)^3\big) = x^2y^4 - x^5y &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_6) = 3 \\ g_6(x,y) &= l_3\big(f_6(x,y+x)\big) = x^2y^4 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_6) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7(x,y) &= l_3\big(xy^5(y+2x)^3\big) = xy^8 + 2x^4y^5 &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_7) = 3 \\ g_7(x,y) &= l_3\big(f_7(x,y-2x)\big) = xy^8 - x^2y^7 - 2x^4y^5 + 2x^5y^4 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_7) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_8(x,y) &= l_3\big(x^2y^4(y-2x)^6\big) = x^2y^{10} - x^5y^7 + x^8y^4 &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_8) = 6 \\ g_8(x,y) &= l_3\big(f_8(x,y+2x)\big) = x^2y^{10} + 2x^5y^7 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_8) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_9(x,y) &= l_3\big(x^4y^8(y-x)^9\big) = x^4y^{17} - x^{13}y^8 &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_9) = 9 \\ g_9(x,y) &= l_3\big(f_9(x,y+x)\big) = x^4y^{17} + 2x^5y^{16} + 2x^7y^{14} + x^8y^{13} + x^{10}y^{11} + 2x^{11}y^{10} &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_9) = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{10}(x,y) &= l_3\big(x^5y^{16}(y+x)^{12}\big) = x^5y^{28} + x^8y^{25} + x^{14}y^{19} + x^{17}y^{16} &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_{10}) = 12 \\ g_{10}(x,y) &= l_3\big(f_{10}(x,y-x)\big) = x^5y^{28} - 2x^8y^{25} + x^{11}y^{22} - x^{14}y^{19} + 2x^{17}y^{16} - x^{20}y^{13} &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_{10}) = 13 \end{aligned}$$

Beispiel : Sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit Charakteristik 5:

$$\begin{aligned} f_{11}(x,y) &= l_5\big(xy^4(y+x)^5\big) = xy^9 + x^6y^4 &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_{11}) = 5 \\ g_{11}(x,y) &= l_5\big(f_{11}(x,y-x)\big) = xy^9 - 4x^2y^8 + x^3y^7 - 4x^4y^6 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_{11}) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{12}(x,y) &= l_5\big(x^2y^3(y+2x)^5\big) = x^2y^{13} + 2x^7y^8 &&\longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_{12}) = 5 \\ g_{12}(x,y) &= l_5\big(f_{12}(x,y-2x)\big) = x^2y^{13} - 3x^3y^{12} + 3x^4y^{11} - x^7y^8 + 3x^8y^7 - 3x^9y^6 &&\longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_{12}) = 6 \end{aligned}$$

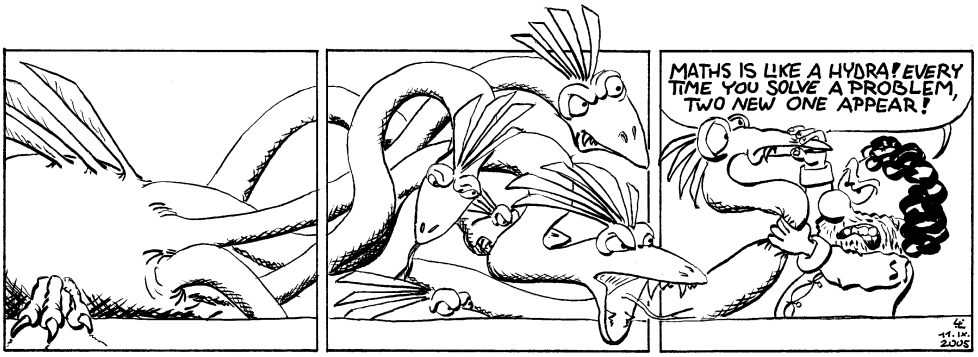
$$f_{13}(x,y) = l_5\big(x^3y^2(y+3x)^{10}\big) = x^3y^{12} + x^8y^7 + 4x^{13}y^2 \quad \longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_{13}) = 10$$
$$g_{13}(x,y) = l_5\big(f_{13}(x,y-3x)\big) = x^3y^{12} - x^4y^{11} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_{13}) = 11$$

$$f_{14}(x,y) = l_5\big(x^4y^6(y+4x)^{10}\big) = x^4y^{16} + 3x^9y^{11} + x^{14}y^6 \quad \longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_{14}) = 10$$
$$g_{14}(x,y) = l_5\big(f_{14}(x,y-4x)\big) = x^4y^{16} - 4x^9y^{11} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_{14}) = 11$$

$$f_{15}(x,y) = l_5\big(x^6y^{19}(y+x)^{15}\big) = x^6y^{34} + 3x^{11}y^{29} + 3x^{16}y^{24} + x^{21}y^{19} \quad \longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_{15}) = 15$$
$$g_{15}(x,y) = l_5\big(f_{15}(x,y-x)\big) = x^6y^{34} - 4x^7y^{33} + x^8y^{32} - 4x^9y^{31} - 3x^{11}y^{29}$$
$$+2x^{12}y^{28} - 3x^{13}y^{27} + 2x^{14}y^{26} + 3x^{16}y^{24} - 2x^{17}y^{23} + 3x^{18}y^{22}$$
$$-2x^{19}y^{21} - x^{21}y^{19} + 4x^{22}y^{18} - x^{23}y^{17} + 4x^{24}y^{16} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_{15}) = 16$$

Beispiel : Sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit Charakteristik 7:

$$f_{16}(x,y) = l_7\big(xy^6(y+x)^7\big) = xy^{13} + x^8y^6 \quad \longrightarrow \quad \mathsf{H}(f_{16}) = 7$$
$$g_{16}(x,y) = l_7\big(f_{16}(x,y-x)\big) = xy^{13} - 6x^2y^{12} + x^3y^{11} - 6x^4y^{10} + x^5y^9 - x^6y^8 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{ord}_y(g_{16}) = 8$$



Anhang A

Potenzreihenring und Koordinatenwechsel

Für das schwere Polyederspiel werden Potenzreihen und Koordinatenwechsel benötigt. Dieser Abschnitt fasst dazu die wichtigsten Informationen zusammen. (Zum größten Teil stammt dieser Teil aus dem Anhang von [14].)

A.1 Definition des Potenzreihenringes

Im Folgenden die wichtigsten Definitionen zu formalen Potenzreihen:

Definition: Seien A ein kommutativer Ring mit Einselement und $A[x_1, \ldots, x_n] = A[x]$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ der Polynomring in n Variablen über A. Weiters sei F_k der A-Modul der homogenen Polynome vom Grad k in $A[x]$.

1. Unter einer formalen Potenzreihe in n Unbekannten über A verstehen wir eine unendliche Folge $f = (f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots)$ von Polynomen $f_k \in F_k$.
2. Addition und Multiplikation zweier Potenzreihen f und g definieren wir wie folgt:
$$\begin{aligned} f+g &= (f_0+g_0, f_1+g_1, \ldots, f_k+g_k, \ldots), \\ fg &= (h_0, h_1, \ldots, h_k, \ldots), \text{ mit } h_k = \sum_{i+j=k} f_i g_j. \end{aligned}$$
3. Mit der oben definierten Addition und Multiplikation wird die Menge aller formalen Potenzreihen in n Variablen über A zu einem kommutativen Ring mit Einselement. Diesen Ring bezeichnen wir mit $A[[x_1, \ldots, x_n]] = A[[x]]$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Mit der kanonischen Identifikation ist $A = F_0 \subseteq A[[x]]$ bzw. $A[x] \subseteq A[[x]]$.
4. Sei f eine formale Potenzreihe ungleich Null. Den kleinsten Index d mit $f_d \neq 0$ nennen wir die Ordnung von f, kurz $\mathrm{ord}(f)$, und f_d die Initialform von f. Weiters setzen wir $\mathrm{ord}(f) = \infty$ für $f = 0$.

Mit dieser Definition gilt folgender

***Hilfssatz* 65:** *Für $f, g \in A[[x]]$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(f+g) &\geq \min\big(\mathrm{ord}(f), \mathrm{ord}(g)\big), \\ \mathrm{ord}(fg) &\geq \mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g). \end{aligned}$$

Wenn A ein Integritätsring ist, dann ist auch $A[[x]]$ ein Integritätsring und es gilt

$$\mathrm{ord}(fg) = \mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g).$$

Beweis. Ähnlich zum Beweis der analogen Aussagen für den Grad eines Polynoms im Polynomring $A[x]$, nur muss man den höchsten Term von f, g bzw. $f+g, fg$ ungleich Null durch die Initialform von von f, g bzw. $f+g, fg$ ersetzen. ☺

Satz 66 : *Eine Potenzreihe f ist genau dann eine Einheit in $A[[x]]$, wenn f_0 in A invertierbar ist.*

Beweis. Wenn $gf = 1$ ist, dann ist $g_0 f_0 = 1$ und damit f_0 invertierbar in A. Sei umgekehrt f_0 invertierbar, dann können wir induktiv $g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots$ mit $g_k \in F_k$ so konstruieren, dass gilt:

$$\begin{aligned} f_0 g_0 &= 1, \\ f_0 g_1 + f_1 g_0 &= 0, \\ &\vdots \\ f_0 g_k + f_1 g_{k-1} + \ldots + f_k g_0 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Für den Induktionsanfang setzen wir $g_0 = f_0^{-1}$. Wenn wir $g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}$ bereits bestimmt haben, können wir aus der letzten Gleichung g_k berechnen und erhalten

$$g_k = -f_0^{-1}(f_1 g_{k-1} + \ldots + f_k g_0).$$

Beachte, dass g_k ein homogenes Polynom vom Grad k ist. Mit dem so konstruierten $g = (g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots)$ gilt nach der Definition der Multiplikation $fg = 1$. ☺

Für das nächste Korollar brauchen wir noch folgende Beobachtung: Die Potenzreihen mit einer positiven Ordnung bilden nach Hilfssatz 65 ein Ideal $\mathfrak{m}$, das von $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt wird. Das Ideal $\mathfrak{m}^d$ besteht aus allen Potenzreihen f mit $\operatorname{ord}(f) \geq d$ und wird erzeugt von allen Monomen $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ mit $\left|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = d$.

Korollar : *Sei K ein Körper. Dann ist $K[[x]]$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.*

Beweis. Klar, da mit Satz 66 jedes Element von $K[[x]] \setminus \mathfrak{m}$ invertierbar ist. ☺

Der Potenzreihenring ist weiters bezüglich der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie vollständig. Dies zeigen wir im nächsten Abschnitt.

A.2 Die $\mathfrak{q}$-adische Topologie

Zuerst erklären wir die allgemeine Konstruktion der sogenannten $\mathfrak{q}$-adischen Topologie auf einem beliebigen Ring.

Definition : Ein Ring A, der zugleich ein topologischer Raum ist, heißt topologischer Ring, wenn er bezüglich der Addition eine topologische Gruppe bildet (d.h., $A \times A \to A, (a, b) \mapsto a - b$ ist stetig), und wenn die Multiplikation stetig ist. In einer topologischen Gruppe ist die Translation ($T_a : A \to A, b \mapsto a + b, a \in A$) ein Homöomorphismus (mit der stetigen Umkehrabbildung T_{-a}). Damit ist eine Topologie auf A durch die Umgebungen der Null eindeutig bestimmt. Wenn U eine Umgebung der Null ist, so ist $a + U$ eine Umgebung von a.

Hilfssatz 67 : *Wenn $\{0\}$ in A abgeschlossen ist, dann ist A hausdorffsch.*

Beweis. Aus der Abgeschlossenheit von $\{0\}$ folgt mit der Stetigkeit von $A \times A \to A, (a, b) \mapsto a - b$, dass die Diagonale $(\{a, a) \in A \times A \ : \ a \in A\})$ als Urbild der Null abgeschlossen ist, und damit ist A hausdorffsch. ☺

Definition: Sei A ein Ring und $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein Ideal. Die $\mathfrak{q}$-adische Topologie auf A wird folgendermaßen definiert: Wir betrachten die absteigende Folge

$$\mathfrak{q}^0 = A \supseteq \mathfrak{q}^1 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{q}^n \supseteq \ldots$$

von Idealen. Eine Teilmenge $U \subseteq A$ ist genau dann eine Umgebung von $a \in A$, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a + \mathfrak{q}^n \subseteq U$.

Mit dieser Definition wird, wie man leicht sieht, A zu einem topologischen Raum und $\{a+\mathfrak{q}^n\}_{n\geq 0}$ zu einer Umgebungsbasis von $a \in A$.

***Hilfssatz* 68:** *Seien A ein Ring, $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein Ideal und A mit der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie versehen. Dann gilt:*

1. *A ist ein topologischer Ring.*
2. *$\mathfrak{q}^n$ mit $n \geq 0$ ist offen und abgeschlossen.*
3. *A ist genau dann hausdorffsch, wenn $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n = \{0\}$ ist.*

Beweis. Zu 1.: Nachprüfen.

Zu 2.: Wenn $a \in \mathfrak{q}^n$ ist, dann ist $a + \mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{q}^n$ und damit $\mathfrak{q}^n$ offen. Andererseits ist $A \setminus \{\mathfrak{q}^n\} = \bigcup_{b \notin \mathfrak{q}^n} b + \mathfrak{q}^n$ offen und daher $\mathfrak{q}^n$ abgeschlossen.

Zu 3.: Klar mit dem vorherigen Hilfssatz und da in einem Hausdorff-Raum jede einelementige Teilmenge abgeschlossen ist. ☺

Im Allgemeinen ist die $\mathfrak{q}$-adische Topologie nicht metrisierbar, trotzdem lässt sich der Begriff der Cauchyfolge auf einen topologischen Ring (wie im Fall von topologischen Vektorräumen) verallgemeinern.

Definition: Gegeben sei ein topologischer Ring A mit der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie. Man nennt eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in A genau dann eine Cauchyfolge, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \subseteq A$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_k - a_l \in U$ für $k, l > m$. Ein topologischer Ring heißt genau dann vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Sei im Folgenden $A[[x_1, \ldots, x_n]] = A[[x]]$ mit der eben definierten Topologie bezüglich des Ideals $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ versehen.

Wie oben bemerkt, ist $f \in A[[x]]$ genau dann ein Element von $\mathfrak{m}^d$, wenn $\operatorname{ord}(f) \geq d$ ist. (Also ist eine Potenzreihe f in dieser Topologie „nahe“ bei Null, wenn die Ordnung von f groß ist.) Da offensichtlich $\bigcap_{d=0}^{\infty} \mathfrak{m}^d = \{0\}$ gilt, ist $A[[x]]$ hausdorffsch.

***Hilfssatz* 69:** *Der Potenzreihenring $A[[x]]$ ist vollständig.*

Beweis. Sei $(f^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $A[[x]]$. Zu jedem $d \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein minimales $m(d)$ mit $\operatorname{ord}(f^i - f^j) > d$ für $i, j > m(d)$, das heißt, die Potenzreihen stimmen bis zur Ordnung d überein. Mit

$$f = (f_0^{m(0)}, f_1^{m(1)}, \ldots, f_k^{m(k)}, \ldots)$$

gilt dann $\operatorname{ord}(f - f^i) \geq d$ für $i \geq m(d)$ und damit $\lim f^i = f$. ☺

Aus der Stetigkeit der Addition bzw. Multiplikation folgt $\lim(f^i - g^i) = \lim f^i + \lim g^i$ bzw. $\lim f^i g^i = \lim f^i \lim g^i$.

Wenn $(f^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann ist die Folge der Partialsummen $h^i = \sum_{k=0}^{i} f^k$ eine Cauchyfolge und somit konvergent. Wir definieren wie immer $\sum_{i=0}^{\infty} f^i = \lim h^i$. Es gelten dann

die üblichen Rechenregeln:

$$\sum_{i=0}^{\infty} f^i + \sum_{i=0}^{\infty} g^i = \sum_{i=0}^{\infty} (f^i + g^i), \tag{A.1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} f^i \sum_{i=0}^{\infty} g^i = \sum_{i=0}^{\infty} h^i, \text{ mit } \sum_{j+k=i} f^j g^k, \tag{A.2}$$

$$g \sum_{i=0}^{\infty} f^i = \sum_{i=0}^{\infty} g f^i. \tag{A.3}$$

Mit dieser Definition können wir jede formale Potenzreihe

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots)$$

als unendliche Reihe $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ schreiben. Manchmal notieren wir genauer

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \textstyle\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha = \sum_\alpha c_\alpha x^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$
$$\text{mit } c_\alpha \in A, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N},$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ und } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Wenn $c_\alpha \neq 0$ ist, so nennen wir $c_\alpha x^\alpha$ einen Term der Potenzreihe f.

Da wir jede Potenzreihe als Limes von Polynomen schreiben können, ist $A[x]$ eine dichte Teilmenge von $A[[x]]$. Dichte Teilmengen, die gleichzeitig ein Unterring von $A[[x]]$ sind, charakterisiert folgender Hilfssatz:

***Hilfssatz* 70 :** *Sei S ein Unterring von $A[[x]]$. S ist genau dann dicht in $A[[x]]$, wenn es für jedes homogene Polynom $g \in A[x]$ mindestens ein $f \in S$ so gibt, dass g die Initialform von f ist.*

Beweis. Sei also S dicht in $A[[x]]$ und $g \in A[x]$ ein homogenes Polynom vom Grad k. Weil S dicht ist, gibt es ein $f \in S$ mit $\operatorname{ord}(f - g) \geq k$. Daraus folgt, dass g die Initialform von f ist. (Für diese Implikation brauchen wir nicht, dass S ein Unterring ist.)

Sei umgekehrt $h \in A[[x]]$. Wir konstruieren induktiv eine Folge $(h^i)_{i \in \mathbb{N}}$ in S mit $(\operatorname{ord}(h^i - h) \geq i$. Setze $h^0 = 0$. Seien $h^0, h^1, \ldots, h^{i-1}$ bereits konstruiert. Wenn $\operatorname{ord}(h^{i-1} - h) \geq i$ ist, dann setzen wir $h^i = h^{i-1}$, sonst haben wir $\operatorname{ord}(h^{i-1} - h) = i - 1$. Sei g die Initialform von $h - h^{i-1}$ und $f \in S$ mit Initialform g. Setze $h^i = h^{i-1} + f$ (hier brauchen wir, dass S additiv abgeschlossen ist), dann ist $\operatorname{ord}(h^i - h) = \operatorname{ord}(h^{i-1} + f - h) \geq i$. ☺

Weiters gilt:

Satz : *Wenn A ein nötherscher Ring ist, dann ist auch $A[[x]]$ mit $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ nöthersch.*

Beweis. Siehe etwa [2] Seite 113, Theorem 10.26. ☺

A.3 Substitutionshomomorphismen

Seien A, A' kommutative Ringe mit Einselement, $\varphi : A \to A'$ ein Ringhomomorphismus und $a_1, \ldots, a_n \in A'$. Für den Polynomring $A[x_1, \ldots, x_n]$ gibt es dann einen eindeutigen Ringhomomorphismus

$$\overline{\varphi} : A[x_1, \ldots, x_n] \to A', \text{ mit } \overline{\varphi}|_A = \varphi \text{ und } \overline{\varphi}(x_i) = a_i, \text{ für } i = 1, \ldots, n,$$

den Substitutionshomomorphismus. („Man setzt a_i für x_i ein“.) Für den Ring der formalen Potenzreihen muss man beim „Einsetzen“ Vorsicht walten lassen, denn im Allgemeinen haben wir keinen geeigneten Konvergenzbegriff zur Verfügung. Mit der zuvor definierten Topologie können wir aber sagen, wann Potenzreihen in Potenzreihen eingesetzt werden können.

Seien dazu $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \in A[[y_1, \ldots, y_n]] = A[[y]]$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in A[[x_1, \ldots, x_n]] = A[[x]]$ Potenzreihen mit $\operatorname{ord}(\varphi_j) \geq 1$ für alle j. Jedes f_i ist ein homogenes Polynom vom Grad i oder 0. Damit ist $\overline{f_i} = f_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ eine Potenzreihe in $A[[x]]$ mit $\operatorname{ord}(f_i) \geq i$ (nach Hilfssatz 65 auf Seite 107), das heißt, $(\overline{f_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Somit ist

$$f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{f_i}$$

eine wohldefinierte Potenzreihe, die, wie man sagt, aus Substitution von y_j durch φ_j entsteht. Durch die Zuordnung

$$f = f(y_1, \ldots, y_m) \mapsto f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$$

ist eine Abbildung $\varphi : A[[y]] \to A[[x]]$ definiert. Mit (A.1) sieht man, dass φ ein A-Algebrenhomomorphismus ist. Man nennt φ den zu $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ gehörigen Substitutionshomomorphismus (oder Einsetzungshomomorphismus).

Das Bild von φ ist ein Unterring von $A[[x]]$, den wir mit $A[[\varphi_1, \ldots, \varphi_m]]$ bezeichnen. Nach Definition von φ ist

$$\varphi(y_j) = \varphi_j, \text{ für } j = 1, \ldots, m,$$
$$\varphi\big(f(y_1, \ldots, y_m)\big) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m).$$

Wenn $\varphi_j = 0$ für alle j ist, dann ist $\varphi(f) = f(0, \ldots, 0) = f_0$, der konstante Term von f (das heißt, wir können φ als einen Homomorphismus $\varphi : A[[y]] \to A$ interpretieren). Aus $\operatorname{ord}(f) \geq d$ folgt $\operatorname{ord}\big(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)\big) \geq d$, damit ist φ stetig. Offensichtlich ist die Komposition zweier Substitutionshomomorphismen wieder ein solcher.

Satz: *Wenn $\psi : A[[y]] \to A[[x]]$ ein stetiger A-Algebrenhomomorphismus ist, dann ist*

$$\operatorname{ord}\big(\psi(y_j)\big) \geq 1 \text{ für } 1 \leq j \leq m$$

und ψ der zu $\big(\psi(y_1), \ldots, \psi(y_m)\big)$ gehörige Substitutionshomomorphismus.

Beweis. Aus der Stetigkeit von ψ folgt $\operatorname{ord}\big(\psi(y_j)\big) \geq 1$. Sei φ der zu $\big(\psi(y_1), \ldots, \psi(y_m)\big)$ gehörige Substitutionshomomorphismus. Dann stimmen φ und ψ auf $A[y]$ überein. Da beide Abbildungen stetig sind, auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen und $A[[x]]$ hausdorffsch ist, sind sie gleich. ☺

Wir können also einen stetigen A-Algebrenhomomorphismus $\varphi : A[[y]] \to A[[x]]$ mit dem zu

$$\overline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in (\mathfrak{m})A[[x]]^m, \text{ mit } \varphi_j = \varphi(y_j) \text{ für } j = 1, \ldots, m,$$

gehörigen Substitutionshomomorphismus identifizieren. Wenn wir in Zukunft schreiben „sei $\varphi : A[[y]] \to A[[x]]$ der zu $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ gehörige Substitutionshomomorphismus“, dann nehmen wir stillschweigend $\operatorname{ord}(\varphi_j) \geq 1$ für $j = 1, \ldots, m$ an.

Nun zur Charakterisierung von Isomorphismen unter den Substitutionshomomorphismen.

Hilfssatz 71: *Sei $\varphi : A[[x]] \to A[[x]]$ der zu $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ gehörige Substitutionshomomorphismus mit x_j Initialform von φ_j für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist φ ein Automorphismus.*

Beweis. Sei $f \in A[[x]]$ ungleich Null. Da φ_j die Initialform x_j für alle $j = 1, \ldots, n$ besitzt, haben $\varphi(f) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und f die gleiche Initialform. Also ist der Kern von φ Null und φ injektiv. Weiters erkennt man damit und mit Hilfssatz 70 auf Seite 110, dass $A[[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]]$ dicht in $A[[x]]$ ist. Wir zeigen noch, dass $A[[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]]$ abgeschlossen ist, daraus folgt die Behauptung. Sei dazu $\big(\varphi(f^i)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $A[[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]]$ mit $f^i \in A[[x]]$ und $\lim \varphi(f^i) = g$. Da die Ordnungen von $\varphi(f^i) - \varphi(f^j)$ und $f^i - f^j$ gleich sind, ist $(f^i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $A[[x]]$. Sei $f = \lim f_i$. Dann folgt aus der Stetigkeit von φ, dass $g = \varphi(f) = f(\varphi)$ ist, also $g \in A[[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]]$. ☺

A.4 Koordinaten und Koordinatenwechsel

Definition : Sei A ein nötherscher Ring. Weiters sei $A[[x_1, \ldots, x_n]]$ der Potenzreihenring über A und $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ sein maximales Ideal.

1. Potenzreihen $f_1, \ldots, f_n \in A[[x_1, \ldots, x_n]]$ heißen genau dann formale Koordinaten des Potenzreihenringes, wenn sie das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ erzeugen, wenn also gilt:

$$\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

2. Ein formaler Koordinatenwechsel im Potenzreihenring $A[[x_1, \ldots, x_n]]$ ist ein lokaler Isomorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}_0\left(A[[x_1, \ldots, x_n]]\right)$ mit $\varphi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$.

Anhang B

Eigenschaften von Polyedern

Begriffe wie Ecken und Kanten von Polyedern sind intuitiv klar. Dieser Abschnitt zeigt, dass die Intuition auch wirklich stimmt.

B.1 Das Lemma von Dickson

Das schwere Polyederspiel arbeitet mit Potenzreihen. Der zu einer Potenzreihe gehörige Newton Polyeder entsteht aus dem Träger der Potenzreihe. Dieser Träger kann eine Menge mit unendlich vielen Elementen sein. Trotzdem besitzt der Polyeder nur endlich viele Ecken. Dies ist eine Konsequenz aus dem Lemma von Dickson.

Zuerst benötigen wir jedoch noch den Begriff eines Ideals in $\mathbb{N}^n$.

Definition: Seien A und B Teilmengen des $\mathbb{N}^n$.

1. Wir nennen die Menge $A \subseteq \mathbb{N}^n$ ein Ideal in $\mathbb{N}^n$, wenn sie bezüglich der Addition aus $\mathbb{N}^n$ abgeschlossen ist, das heißt, es gilt
$$A = A + \mathbb{N}^n \text{ mit } A + \mathbb{N}^n := \{a + \alpha \ : \ a \in A, \alpha \in \mathbb{N}^n\}.$$
2. Sei $A \subseteq \mathbb{N}^n$ ein Ideal in $\mathbb{N}^n$. Dann heißt $B \subseteq A$ genau dann ein Erzeugendensystem von A, wenn gilt:
$$A = \bigcup_{\alpha \in B} (\alpha + \mathbb{N}^n).$$
Oder anders notiert:
$$A = B + \mathbb{N}^n.$$

Nun können wir das Lemma von Dickson beweisen:

Hilfssatz 72 (Lemma von Dickson): *Sei $A \subseteq \mathbb{N}^n$ ein Ideal in $\mathbb{N}^n$. Dann besitzt A ein endliches Erzeugendensystem.*

Beweis. Sei also $A \subseteq \mathbb{N}^n$ ein Ideal in $\mathbb{N}^n$. (Damit gilt $A + \mathbb{N}^n = A$.) Um zu zeigen, dass A endlich erzeugt ist, geben wir zuerst ein spezielles Erzeugendensystem $B(A)$ an (siehe Punkt 1 unten) und zeigen dann, dass dieses endlich ist (siehe Punkt 2 unten).

Wir definieren
$$B(A) := \{\alpha \in A \ : \ \alpha \text{ minimal bezüglich } \leq_{\text{kp}}\}.$$
Dabei bezeichnet $\leq_{\text{kp}}$ den Vergleich der Komponenten auf $\mathbb{N}^n$, das heißt
$$\alpha \leq_{\text{kp}} \beta \Longleftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

1. Wir zeigen, dass $B(A)$ ein Erzeugendensystem von A ist, dass also $B(A) + \mathbb{N}^n = A$ ist. Dazu zeigen wir die beiden Inklusionen $B(A) + \mathbb{N}^n \subseteq A$ und $A \subseteq B(A) + \mathbb{N}^n$: Einerseits ist nach

Definition $B(A) \subseteq A$. Da $A + \mathbb{N}^n = A$ ist, ist auch $B(A) + \mathbb{N}^n \subseteq A$. Sei andererseits $\gamma \in A$ und wir nehmen indirekt an $\gamma \notin B(A) + \mathbb{N}^n$. Dann ist γ bezüglich $\leq_{\text{kp}}$ nicht minimal. Das heißt, es gibt ein $\alpha \in B(A)$ mit $\alpha \leq_{\text{kp}} \gamma$. Also ist $\alpha_i \leq \gamma_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Damit gibt es ein $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $\alpha + \beta = \gamma$ (nämlich $\beta_i := \gamma_i - \alpha_i$) und daher ist $\gamma \in B(A) + \mathbb{N}^n$ im Widerspruch zur Annahme. Damit ist

$$B(A) + \mathbb{N}^n = A,$$

also $B(A)$ ein Erzeugendensystem von A.

2. Es ist noch zu zeigen, dass $B(A)$ endlich ist. Wir zeigen sogar, dass $B(X)$ für jede beliebige Menge $X \subseteq \mathbb{N}^n$ endlich ist. Dazu führen wir eine vollständige Induktion über die Dimension n.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $X \subseteq \mathbb{N}$ und damit $B(X) = \min(X)$ einelementig, also endlich.

Induktionsschritt $n > 1$: Sei $\beta \in B(X)$ beliebig. Setze

$$W := \{\gamma \in \mathbb{N}^n \ : \ \gamma \leq_{\text{kp}} \beta\},$$

dann ist W ein endlicher Quader in $\mathbb{N}^n$ (siehe Abbildung 61).

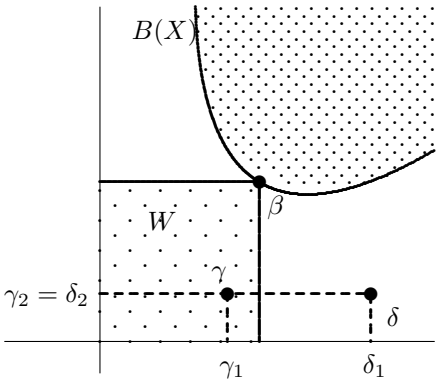


Abbildung 61: Die Mengen $B(X)$ und W.

Beachte, dass es für jedes $\delta \in \mathbb{N}^n \setminus (\beta + \mathbb{N}^n)$ (also $\delta \notin \beta + \mathbb{N}^n$) ein $i, 1 \leq i \leq n$, und ein $\gamma \in W$ gibt, sodass $\delta_i = \gamma_i$ ist. Damit ist

$$\varepsilon := \delta - \gamma \in \mathbb{N}^{i-1} \times 0 \times \mathbb{N}^{n-i}.$$

Wir sehen, dass mit

$$N_i := \mathbb{N}^{i-1} \times 0 \times \mathbb{N}^{n-i} \subseteq \mathbb{N}^n$$

gilt:

$$\mathbb{N}^n \setminus (\beta + \mathbb{N}^n) = \bigcup_{\gamma \in W, 1 \leq i \leq n} (\gamma + N_i).$$

(Siehe Abbildung 62.)

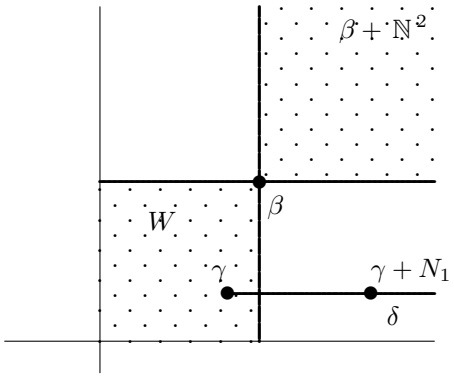


Abbildung 62: Die Rolle von N_i.

Es gilt also:

$$\mathbb{N}^n = (\beta + \mathbb{N}^n) \cup \bigcup_{\gamma \in W, 1 \leq i \leq n} (\gamma + N_i).$$

Mit der Gleichung

$$\begin{aligned} X &= X \cap \mathbb{N}^n \\ &= X \cap \left((\beta + \mathbb{N}^n) \cup \bigcup_{\gamma \in W, 1 \leq i \leq n} (\gamma + N_i) \right) \\ &= \big(X \cap (\beta + \mathbb{N}^n)\big) \cup \bigcup_{\gamma \in W, 1 \leq i \leq n} \big(X \cap (\gamma + N_i)\big) \end{aligned}$$

erhalten wir schließlich:

$$B(X) = \underbrace{B\big(X \cap (\beta + \mathbb{N}^n)\big)}_{=\{\beta\}} \cup \bigcup_{\gamma \in W, 1 \le i \le n} B\big(X \cap (\gamma + N_i)\big).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist aber $B\big(X \cap (\gamma + N_i)\big)$ endlich und damit ist (da auch W endlich ist) $B(X)$ endlich. ☺

(Mit diesem Hilfssatz lässt sich sogar zeigen, dass $K[x]$ (bzw. $K[[x]]$) noethersch ist.)

B.2 Eigenschaften von Polyedern

Um zu zeigen, dass es immer eine Gewinnstrategie des Kaninchens im Polyederspiel gibt, benötigen wir einige Hilfsmittel. Dabei handelt es sich um Eigenschaften von (Newton) Polyedern (zum Beispiel den Begriff der „Ecke“) und wie sich diese im Polyederspiel verhalten. (Die allgemeinen Resultate sind aus [19] entnommen.)

Definition: Sei A eine endliche, nichtleere Teilmenge des $\mathbb{N}^n$ und $N = N(A)$ der von ihr erzeugte Newton-Polyeder.

1. Ein Element e von N heißt Ecke von N, wenn es eine lineare Abbildung $g \neq 0, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt und eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

   $$N \subseteq \{u \in \mathbb{R}^n \,:\, g(u) \le d\} \text{ und } g^{-1}(d) \cap N = \{e\}.$$

   Das heißt, es gibt eine affine Hyperebene, deren Schnitt mit dem Polyeder genau die Ecke liefert.

2. Eine Teilmenge Q von N heißt Kante von N, wenn es eine lineare Abbildung $g \neq 0, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt und eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

   $$N \subseteq \{u \in \mathbb{R}^n \,:\, g(u) \le d\},$$
   $$g^{-1}(d) \cap N = Q,$$

   und die affine Hülle von Q eindimensional ist. Das heißt, es gibt eine affine Hyperebene, deren Schnitt mit dem Polyeder genau die Kante liefert.

3. Zwei Ecken von N sind benachbart, wenn die Strecke zwischen ihnen eine Kante von N ist.

Hilfssatz 73: *Sei A eine endliche, nichtleere Teilmenge des $\mathbb{N}^n$ und $N(A)$ der von ihr erzeugte Newton-Polyeder. Dann gilt:*

1. *Jede Ecke von $N(A)$ ist ein Element von A.*
2. *Ist $E \subseteq A$ die Menge der Ecken von $N(A)$, dann ist $N(E) = N(A)$.*
3. *Die Menge der Ecken ist die kleinste Menge, die $N(A)$ erzeugt, das heißt, für $e \in E$ gilt*

   $$N(E) \neq N\big(E \setminus \{e\}\big).$$

Beweis. Punkt 1: Sei e eine Ecke von $N(A)$. Dann gibt es $u \in \operatorname{conv}(A)$ und $v \in \mathbb{R}^n_+$ mit $e = u + v$. Seien weiters $g \neq 0$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ so, dass $\{e\} = g^{-1}(d) \cap N(A)$ und $N(A) \subseteq \{u \in \mathbb{R}^n \,:\, g(u) \le d\}$ ist. Dann ist

$$d = g(e) = g(u + v) = g(u) + g(v).$$

Da $u \in \operatorname{conv}(A) \subseteq N(A)$ ist, ist $g(u) \le d$. Also muss $g(v) \ge 0$ sein. Weiters ist für alle $t \in \mathbb{R}^n_+$ auch $u + t \cdot v \in \operatorname{conv}(A) + \mathbb{R}^n_+ = N(A)$. Daher ist für alle $t \in \mathbb{R}^n_+$ auch

$$g(u + t \cdot v) = g(u) + t \cdot \underbrace{g(v)}_{\ge 0} \le d.$$

Daher muss $g(v) = 0$ sein und damit $g(u) = d$. Es ist also

$$u \in g^{-1}(d) \cap N(A) \text{ also } e = u \in \text{conv}(A).$$

Sei nun $e = \sum_{a\in A} c_a a$ mit $c_a \in \mathbb{R}_+^n$ und $\sum_{a\in A} c_a = 1$. Damit ist nach obiger Überlegung

$$d = g(e) = g\Big(\sum_{a\in A} c_a a\Big) = \sum_{a\in A} c_a g(a)$$

mit $g(a) \leq d$ für $a \in A \subseteq N(A)$. Wäre $e \notin A$, dann wäre $g(a) < d$ für alle $a \in A$, also

$$d = g(e) = \sum_{a\in A} c_a g(a) < \Big(\sum_{a\in A} c_a\Big) d = d.$$

Widerspruch.

Punkt 2 und 3: Es ist klar, dass jede Ecke von $N(A)$ ein Element des (topologischen) Randes von $N(A)$ ist (bezüglich der euklidischen Topologie). Sei $R \subseteq A$ die Menge jener Punkte aus A, die am Rand von $N(A)$ liegen. Wir überlegen zuerst, dass $N(A) = N(R)$ ist und dann, dass $N(R) = N(E)$ ist: Ist $a \in A$ und a ein Element des (topologischen) Inneren von $N(A)$, dann gibt es ein b_1 am Rand mit $a \in b_1 + \mathbb{R}_+^n$. Für jedes b_1 am Rand von $N(A)$ gibt es aber ein $b_2 \in \text{conv}(R)$ und ein $\delta \in \mathbb{R}_+^n$ mit $b_1 = b_2 + \delta$. Also ist $N(A) = N(R)$. Es bleibt noch zu zeigen: Ist $e \in R$ und e keine Ecke, dann ist $\text{conv}(R) = \text{conv}(R \setminus \{e\})$. Beachte dazu, dass es lineare Abbildungen $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\text{conv}(R) = \{u \in \mathbb{R}^n \ : \ f_1(u) \leq b_1, \ldots, f_k(u) \leq b_k\}.$$

Sei $I := \{i \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq i \leq k, f_i(e) = b_i\}$. Da e keine Ecke ist, enthält der Durchschnitt

$$\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(b_i)$$

eine Gerade G durch e. Für $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus I$ ist $f_i(e) < b_i$, also gibt es $v, w \in N(A)$ mit

$$\{sv + tw \ : \ s, t \in \mathbb{R}_+, s + t = 1\} \subseteq G \cap N(A)$$

und $e = \frac{1}{2}(v+w)$. Seien $(c_a)_{a\in A}$ und $(d_a)_{a\in A}$ Familien nichtnegativer Zahlen so, dass $\sum_{a\in A} c_a = 1$, $\sum_{a\in A} d_a = 1$, $\sum_{a\in A} c_a a = v$ und $\sum_{a\in A} d_a a = w$ ist.

Dann ist $c_e < 1$, $d_e < 1$ und

$$e = \sum_{a\in A} \frac{1}{2}(c_a + d_a)a.$$

Es ist $c_e + d_e < 2$, also ist $e \in \text{conv}(A \setminus \{e\})$, da gilt:

$$\begin{aligned}
e &= \frac{e(2 - c_e - d_e)}{2 - c_e - d_e} = \frac{2e}{2 - c_e - d_e} - \frac{(c_e + d_e)e}{2 - c_e - d_e} \\
&= \frac{2}{2 - c_e - d_e} \sum_{a\in A} \frac{1}{2}(c_a + d_a)a - \frac{(c_e + d_e)e}{2 - c_e - d_e} \\
&= \sum_{a\in A, a\neq e} \frac{c_a + d_a}{2 - c_e - d_e} a + \frac{(c_e + d_e)e}{2 - c_e - d_e} - \frac{(c_e + d_e)e}{2 - c_e - d_e} \\
&= \sum_{a\in A, a\neq e} \frac{c_a + d_a}{2 - c_e - d_e} a \in \text{conv}(A \setminus \{e\}).
\end{aligned}$$

☺

Hilfssatz 74 : *Sei A eine endliche, nichtleere Teilmenge des $\mathbb{N}^n$ und $N(A)$ der von ihr erzeugte Newton-Polyeder. Seien weiters $J \subseteq \{1, \ldots, n\}, J \neq \emptyset, j \in J$ und $A' := \tau_{J,j}(A)$, sowie $N(A')$ der von A' erzeugte Newton-Polyeder. Ist $E \subseteq A$ die Menge der Ecken von $N(A)$ und $E' \subseteq A'$ jene von $N(A')$, dann gilt:*

1. $E' \subseteq \tau_{J,j}(E)$.
2. $|E'| \leq |E|$.

Beweis. Punkt 2 folgt direkt aus Punkt 1. Um Punkt 1 zu zeigen, überlegen wir, dass

$$N\big(\tau_{J,j}(E)\big) = N(A')$$

ist. Dann folgt die Behauptung mit Hilfssatz 73, da E' die kleinste erzeugende Menge von $N(A')$ ist.

Sei $a \in A$. Nach Hilfssatz 73 gilt dann

$$a = \sum_{e \in E} c_e e + \delta,$$

mit $0 \leq c_e \leq 1, \sum_{e \in E} c_e = 1$ und $\delta \in \mathbb{R}^n_+$. Also ist

$$a' = \tau_{J,j}(a) = \tau_{J,j}\Big(\sum_{e \in E} c_e e + \delta\Big) = \sum_{e \in E} c_e \tau_{J,j}(e) + \underbrace{\tau_{J,j}(\delta)}_{\geq 0} \in N\big(\tau_{J,j}(E)\big).$$

Das heißt aber, dass $N(A') \subseteq N\big(\tau_{J,j}(E)\big)$ ist. Da $\tau_{J,j}(E) \subseteq A'$ ist, ist auch $N(A') \supseteq N\big(\tau_{J,j}(E)\big)$ und damit ist $N(A') = N\big(\tau_{J,j}(E)\big)$. ☺

Hilfssatz 75 : *Sei A eine endliche Menge in $\mathbb{N}^n$, $N(A)$ der von ihr erzeugte Newton-Polyeder und E die Menge der Ecken von $N(A)$. Besitzt $N(A)$ nur eine Ecke, ist also $|E| = 1$, so ist $N(A)$ monomial.*

Beweis. Klar mit Hilfssatz 73. ☺

Anhang C

Mehr zum Vektorspiel

In 2.1 wurde das Vektorspiel eingeführt und eine Lösung präsentiert. In diesem Abschnitt wird einerseits gezeigt, wie sich das Vektorspiel streng formal definieren lässt, andererseits gefragt, ob es Lösungen für die allgemeinere Version über $\mathbb{R}^n$ gibt und es wird eine obere Schranke angegeben, wie lange ein Spiel höchstens dauert.

C.1 Formalisierung des Vektorspiels

Definition : Sei $\mathcal{P}_n$ die Potenzmenge der Menge $\{1, \ldots, n\}$ ohne die leere Menge.

1. Eine Abbildung $\mathbf{K}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{K} : \mathbb{Z}^n &\to \mathcal{P}_n \\ v &\mapsto \mathbf{K}(v) \end{aligned}$$

   heißt Strategie des Kaninchens für das Vektorspiel.

2. Eine Abbildung $\mathbf{h}$, gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{h} : \mathbb{Z}^n \times \mathcal{P}_n &\to \{1, \ldots, n\} \\ (v, J) &\mapsto \mathbf{h}(v, J) =: j \text{ mit } j \in J, \end{aligned}$$

   heißt Strategie des Hutmachers für das Vektorspiel.

3. Gegeben sei eine Strategie $\mathbf{K}$ des Kaninchens und eine Strategie $\mathbf{h}$ des Hutmachers für das Vektorspiel. Dann heißt die Abbildung $\mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}$, definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}} : \mathbb{Z}^n &\to \mathbb{Z}^n \\ v &\mapsto \mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}(v) := v' := \tau_{\mathbf{K}(v),\mathbf{h}(v,\mathbf{K}(v))}(v), \end{aligned}$$

   ein Spielzug im Vektorspiel mit den Strategien $\mathbf{K}$ und $\mathbf{h}$. Dabei ist für $J \subseteq \{1, \ldots, n\}, j \in J$ – wie schon oben definiert –

$$\tau_{J,j} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$$

   jene lineare Abbildung, die die j-te Komponente eines Vektors durch die Summe jener Komponenten ersetzt, deren Indizes in J liegen, und die anderen Komponenten unverändert lässt. In Formeln: Für $v \in \mathbb{Z}^n$ ist $v' := \tau_{J,j}(v)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} v'_j &:= \sum_{k \in J} v_k, \\ v'_i &:= v_i \text{ für } i \neq j. \end{aligned}$$

4. Sei $v \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{K}$ eine Strategie des Kaninchens und $\mathbf{h}$ eine Strategie des Hutmachers. Weiters sei für $m \in \mathbb{N}$
$$v^m := \mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}{}^m(v)$$
die Folge der Spielzüge im Vektorspiel mit $\mathbf{K}, \mathbf{h}$ und v. Das Tripppel
$$\big(\mathbf{K}, \mathbf{h}, (v^m)_{m\in\mathbb{N}}\big)$$
heißt ein Vektorspiel zum Vektor v mit den Strategien $\mathbf{K}$ und $\mathbf{h}$.

5. Ein Vektorspiel zu v mit $\mathbf{K}$ und $\mathbf{h}$ heißt für das Kaninchen gewonnen bzw. für den Hutmacher verloren, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:
$$\mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}{}^m(v) \in \mathbb{N}^n \text{ oder } -\mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}{}^m(v) \in \mathbb{N}^n.$$

6. Eine Strategie $\mathbf{K}$ des Kaninchens für das Vektorspiel heißt Gewinnstrategie zu $v \in \mathbb{Z}^n$ für das Kaninchen, wenn es zu jeder Strategie $\mathbf{h}$ des Hutmachers ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:
$$\mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}{}^m(v) \in \mathbb{N}^n \text{ oder } -\mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}{}^m(v) \in \mathbb{N}^n.$$
Eine Strategie $\mathbf{K}$ des Kaninchens heißt Gewinnstrategie in $\mathbb{Z}^n$, wenn sie zu jedem $v \in \mathbb{Z}^n$ eine Gewinnstrategie des Kaninchens ist.

7. Für $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $v \in \mathbb{N}^n$ oder $-v \in \mathbb{N}^n$ schreiben wir kürzer
$$\pm v \in \mathbb{N}^n \text{ oder } v \in \pm\mathbb{N}^n.$$

Frage: Gibt es zu jedem Vektor in $\mathbb{Z}^n$ eine Gewinnstrategie des Kaninchens?

C.2 Das Vektorspiel im $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt wird das Vektorspiel mit Vektoren im $\mathbb{R}^n$ betrachtet. Dazu werden die Definitionen aus dem vorangegangenen Abschnitt verallgemeinert, indem $\mathbb{R}$ (die reellen Zahlen) statt $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}_+$ (die positiven reellen Zahlen) statt $\mathbb{N}$ gesetzt wird. Der folgende Satz charakterisiert alle Vektoren in $\mathbb{R}^n$, für die es eine Gewinnstrategie gibt.

Satz: *Sei W die Menge jener Vektoren in $\mathbb{R}^n$, die zwei $\mathbb{N}$-linear unabhängige Komponenten mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzen. In Formeln:*

$$W := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;:\; \text{es gibt } 1 \le i,k \le n \text{ so, dass gilt} \quad \begin{array}{l} (a)\ v_i \neq 0 \neq v_k \\ (b)\ \operatorname{sign}(v_i) = -\operatorname{sign}(v_k) \text{ und} \\ (c)\ l\cdot v_i + m\cdot v_k \neq 0 \text{ für alle } l,m \in \mathbb{N}_{>0}. \end{array} \right\}.$$

Dann gibt es genau dann eine Gewinnstrategie des Kaninchens zu $v \in \mathbb{R}^n$, wenn $v \notin W$ ist.

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Ist $v \notin W$, so ist entweder $v \in \pm\mathbb{R}^n_+$ oder es gibt ein $r \in \mathbb{R}$ so, dass $v = r\cdot\widetilde{v}$ mit $\widetilde{v} \in \mathbb{Z}^n$ ist. Ist $v \in \mathbb{R}^n_+$, so ist jede Strategie des Kaninchens eine Gewinnstrategie zu v. Gibt es hingegen zu v ein $r \in \mathbb{R}$ so, dass $v = r\cdot\widetilde{v}$ mit $\widetilde{v} \in \mathbb{Z}^n$ ist, dann gibt es nach dem vorherigen Abschnitt eine Gewinnstrategie $\mathbf{K}$ des Kaninchens für $\widetilde{v}$. Klarerweise ist dann $\mathbf{K}$ auch eine Gewinnstrategie des Kaninchens für v.

„$\Longrightarrow$“: Wir zeigen, dass es für kein $v \in W$ eine Gewinnstrategie des Kaninchens zu v gibt. Beachte, dass es $1 \le i,k \le n$ zu jedem $v \in W$ gibt mit
$$v_i \neq 0 \neq v_k \text{ und } \operatorname{sign}(v_i) = -\operatorname{sign}(v_k). \qquad (*)$$
Gibt es zu jedem $J \subseteq \{1,\dots,n\}, |J| \ge 2$ ein $j \in J$ so, dass $\tau_{J,j}(v)$ wieder ein Element von W ist (für beliebiges $v \in V$), so gibt es auch zu jeder Strategie $\mathbf{K}$ des Kaninchens eine Strategie $\mathbf{h}$ des Hutmachers, sodass die Folge der Spielzüge mit $\mathbf{K}$ und $\mathbf{h}$
$$\big(\tau_{J,j}{}^m(v)\big)_{m\in\mathbb{N}}$$

in W liegt. Das heißt aber (wegen der Eigenschaft $(*)$), dass es keine Gewinnstrategie des Kaninchens zu $v \in W$ gibt.

Sei also $v \in W$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass v von folgender Gestalt ist:

$$v = (p, -q, v_3, \ldots, v_n) \text{ mit } p > q > 0 \text{ und } p, q \quad \mathbb{N} - \text{linear unabhängig.}$$

Gibt es für $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|J| \geq 2$ einen Index $i > 2$, so ist mit $j = \mathbf{h}(J) = i$ der Vektor

$$(p, -q, v_3, \ldots, v_{i-1}, \sum_{k \in J} v_k, \ldots, v_n)$$

wieder ein Element von W. Es bleibt noch $J = \{1, 2\}$ zu überprüfen. Hier gilt aber für $j = \mathbf{h}(J) = 1$ ebenfalls (da p und q $\mathbb{N}$-linear unabhängig sind):

$$(\underbrace{p - q}_{>0}, \underbrace{-q}_{<0}, v_3, \ldots, v_n) \in W.$$

☺

Es genügt also das Vektorspiel in $\mathbb{Z}^n$ zu betrachten.

C.3 Komplexität des Vektorspiels

In diesem Abschnitt wird eine obere Schranke für die maximale Anzahl der Spielzüge eines Vektorspiels gegeben.

C.3.1 Komplexität des Vektorspiels in $\mathbb{N}^2$

In $\mathbb{Z}^2$ ist die Gewinnstrategie des Kaninchens gegeben durch

$$J = \{1, 2\}$$

für alle $v \in \mathbb{Z}^2$. Der Hutmacher verliert also auf jeden Fall, egal, welche Strategie er selbst verwendet. Doch die Frage liegt nahe, mit welcher Strategie der Hutmacher seine Niederlage am längsten hinauszögern kann und wie lange dann das Vektorspiel zu einem gegebenen Vektor dauert. Wir machen folgende Definition (für jedes $n \geq 2$).

Definition : Sei $v \in \mathbb{Z}^n$ und $\mathbf{K}$ eine Gewinnstrategie des Kaninchens zu v.

1. Sei $\mathbf{h}$ eine Strategie des Hutmachers und $(v^m)_{m \in \mathbb{N}} = \left(\mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}{}^m(v)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ die Folge der Spielzüge mit $\mathbf{K}$ und $\mathbf{h}$. Mit $g := g_{\mathbf{K}}(\mathbf{h}, v) \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir jene natürliche Zahl, für die gilt:
$$v^{g-1} \notin \pm\mathbb{N}^n \text{ und } v^g \in \pm\mathbb{N}^n.$$
Wir nennen $g_{\mathbf{K}}(\mathbf{h}, v)$ die maximale Anzahl der Spielzüge im Vektorspiel mit $\mathbf{K}, \mathbf{h}$ und v. Der Hutmacher verliert also genau nach g Zügen.

2. Eine Strategie $\mathbf{h}$ des Hutmachers heißt optimal bezüglich v und $\mathbf{K}$, wenn für alle Strategien $\mathbf{h}'$ des Hutmachers gilt:
$$g_{\mathbf{K}}(\mathbf{h}, v) \geq g_{\mathbf{K}}(\mathbf{h}', v).$$
Spielt der Hutmacher also eine optimale Strategie, so dauert das Spiel am längsten.

Da es in $\mathbb{Z}^2$ im Wesentlichen genau eine Gewinnstrategie K gibt (siehe oben), ist es nicht schwer, eine optimale Strategie des Hutmachers bezüglich K zu definieren:

Hilfssatz: *Sei* K *die Gewinnstrategie des Kaninchens in* $\mathbb{Z}^2$*. Dann ist die optimale Strategie* h *des Hutmachers bezüglich* K *und einem beliebigen* $v \in \mathbb{Z}^2$ *wie folgt gegeben: Für* $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ *sei*

$$\mathsf{h}\big(v, \{1,2\}\big) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \operatorname{sign}(v_1) = \operatorname{sign}(v_1 + v_2), \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Es ist klar, dass h eine optimale Strategie des Hutmachers ist. Wir können auch von der optimalen Strategie des Hutmachers sprechen, da jede andere optimale Strategie des Hutmachers für Vektoren $v \in \mathbb{Z}^2, v \notin \pm\mathbb{N}^2$ definitionsgemäß wie h aussehen muss. ☺

Beispiel: Sei $v = (81, -25)$. Das Vektorspiel mit $v, \mathsf{K}, \mathsf{h}$ verläuft wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
81 & \xrightarrow[j=1]{J=\{1,2\}} & 56 & \xrightarrow[j=1]{J=\{1,2\}} & 31 & \xrightarrow[j=1]{J=\{1,2\}} & 6 & & & & & & \\
-25 & & -25 & & -25 & & -25 & & & & & & \\
 & \xrightarrow[j=2]{J=\{1,2\}} & 6 & \xrightarrow[j=2]{J=\{1,2\}} & 6 & \xrightarrow[j=2]{J=\{1,2\}} & 6 & \xrightarrow[j=2]{J=\{1,2\}} & 6 & \xrightarrow[j=1]{J=\{1,2\}} & & & \\
 & & -19 & & -13 & & -7 & & -1 & & & & \\
5 & \xrightarrow[j=1]{J=\{1,2\}} & 4 & \xrightarrow[j=1]{J=\{1,2\}} & 3 & \xrightarrow[j=1]{J=\{1,2\}} & 2 & \xrightarrow[j=1]{J=\{1,2\}} & 1 & \xrightarrow[j=2]{J=\{1,2\}} & 1 & & \\
-1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & 0 & &
\end{array}.$$

Nun wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie lange ein Vektorspiel mit K, h und einem $v \in \mathbb{Z}^2, v \notin \pm\mathbb{N}^2$ dauert. Wir wollen also die maximale Anzahl der Spielzüge bestimmen bzw. obere und untere Schranken dafür. Eine obere Schranke ist schnell gefunden:

Hilfssatz: *Sei* K *die Gewinnstrategie des Kaninchens in* $\mathbb{Z}^2$ *und* h *die bezüglich* K *und* $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2, v \notin \pm\mathbb{N}^2$ *optimale Strategie des Hutmachers. Dann gilt:*

$$g_{\mathsf{K}}(\mathsf{h}, v) \leq |v_1| + |v_2| - 1.$$

Ein Vektorspiel mit K, h *und* v *dauert also höchstens* $|v_1| + |v_2| - 1$ *Züge lang.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion über die Summe der Beträge der Komponenten von v. Dabei ist klar, dass für $v = (v_1, v_2) \notin \pm\mathbb{N}^2$ immer $|v_1| + |v_2| \geq 2$ gilt.

Sei $|v_1| + |v_2| = 2$: Dann hat v bis auf die Permutation seiner Komponenten die Gestalt $v = (1, -1)$. Da $\tau_{\{1,2\},j} \in \pm\mathbb{N}^2$ ist für jedes $j \in \{1, 2\}$, gilt

$$g_{\mathsf{K}}\big(\mathsf{h}, (1, -1)\big) = 1 = |v_1| + |v_2| - 1.$$

Sei nun $|v_1| + |v_2| > 2$: Der Vektor v hat bis auf Permutation der Komponenten und bis auf das Vorzeichen die Gestalt $v = (a, -b)$ mit $a, b \in \mathbb{N}, a \geq b \geq 1$. Es gilt nach Definition von h:

$$\mathsf{h}\big((a, -b), \{1, 2\}\big) = 1.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbf{Z}_{\mathsf{K},\mathsf{h}}(a, -b) = (a - b, -b).$$

Nach Induktionsannahme ist

$$g_{\mathsf{K}}\big(\mathsf{h}, (a - b, -b)\big) = |a - b| + | - b| - 1 = a - b + b - 1 = a - 1.$$

Es folgt, da $b \geq 1$ ist:

$$g_{\mathsf{K}}\big(\mathsf{h}, (a, -b)\big) = 1 + a - 1 = a \leq a + b - 1 = |v_1| + |v_2| - 1.$$

☺

Damit haben wir eine obere Schranke für die maximale Anzahl der Spielzüge im Vektorspiel gefunden. Für spezielle Vektoren, wie zum Beispiel $v = (a, -1)$, gibt sie sogar die genaue Anzahl der nötigen Spielzüge an, also $g_{\mathsf{K}}\big(\mathsf{h}, (a, -1)\big) = a$. In diesem Sinne ist sie sozusagen „optimal“.

Im Allgemeinen ist sie aber viel zu hoch. Beim Vektor $(81,-25)$ beträgt die Schranke 105. Das Spiel dauert aber, wie wir oben gesehen haben, nur 13 Züge lang.

Daher untersuchen wir im Folgenden das Vektorspiel mit K und h noch genauer. Wie sich herausstellen wird, gibt es eine Verbindung zum euklidischen Algorithmus. Wir wollen diesen noch kurz beschreiben:

Euklidischer Algorithmus: Seien $a,b\in\mathbb{N},a\geq b$. Definiere $r_m,q_m\in\mathbb{N}$ induktiv durch:

$$\begin{array}{lcl} r_{-1} & := & a,\\ r_0 & := & b,\\ r_{m+1} & := & \text{Rest von } r_{m-1} \text{ bei Division durch } r_m,\\ q_{m+1} & := & \text{Quotient von } r_{m-1} \text{ bei Division durch } r_m, \end{array}$$

für $m=0,1,\ldots$, solange $r_m\neq 0$. Dann bricht, wie bekannt sein dürfte, obige Definition ab, das heißt, es gibt ein $m_0\in\mathbb{N}$ mit $r_{m_0}\neq 0$ und $r_m=0$ für alle $m>m_0$. Wir nennen m_0 die Anzahl der Divisionen im Euklidischen Algorithmus mit a und b.

Hilfssatz: *Sei $v=(a,-b)$ mit $a,b\in\mathbb{N},a\geq b>0$ und für $m\in\mathbb{N}$*

$$\begin{array}{rcl} v^m=(v_1^m,v_2^m) & := & \mathbf{Z}_{\mathsf{K},\mathsf{h}}{}^m(v),\\ a^m & := & v_1^m,\\ b^m & := & v_2^m. \end{array}$$

Sei weiters m_0 die Anzahl der Divisionen im Euklidischen Algorithmus mit a und b, die daraus erhaltenen Reste $r_1,\ldots,r_{m_0}$ und $q_1,\ldots,q_{m_0}$ die daraus erhaltenen Quotienten. Dann gilt für $m\leq m_0$:

1. *Für $Q:=\sum_{i=1}^m q_i$ ist entweder $a^Q=r^Q$ oder $b^Q=r^Q$.*
2. *Die maximale Anzahl der Spielzüge im Vektorspiel mit K,h und $v=(a,-b)$ entspricht der Summe der q_i, also:*
$$g_{\mathsf{K}}\big(\mathsf{h},(a,-b)\big)=\sum_{i=1}^{m_0}q_i.$$

Beweis. Punkt 1 beweisen wir mit vollständiger Induktion über die Summe der Beträge der Komponenten von v.

Sei $a+b=2$: Dann ist $v=(1,-1)$ und es gilt $r_1=0,q_1=1$. Weiters ist $\mathbf{Z}_{\mathsf{K},\mathsf{h}}(1,-1)=(1,0)\in\mathbb{N}^2$, also verliert der Hutmacher nach genau einem Zug (das sind q_1 Züge). Weiters gilt $a^1=1$ und $b^1=0=r_1$.

Sei $a+b>2$: Da h eine optimale Strategie des Hutmachers und $a\geq b$ ist gilt

$$\mathsf{h}\big(v^k,\{1,2\}\big)=1,$$

solange $|v_1^k|\geq|v_2^k|$ ist. Das heißt $a^k=a-k\cdot b$ und $b^k=b$, für jene $k\geq 1$ mit $a-(k-1)\cdot b\geq b$. Es gibt also ein k_0 mit $a-(k_0-1)\cdot b\geq b$ und $a-k_0\cdot b\leq b$. Klarerweise gilt $k_0=q_1$ und $a^{k_0}=a^{q_1}=a-q_1\cdot b=r_1$. Da $a^{q_1}+b^{q_1}=a-q_1\cdot b+b<a+b$ ist, folgt der Punkt 1 mit der Induktions-Voraussetzung.

Punkt 2 folgt direkt aus Punkt 1, da dann für $Q:=\sum_{i=1}^{m_0}q_i$ entweder $a^Q=0$ oder $b^Q=0$ ist. ☺

Beispiel: Noch einmal das Beispiel mit dem Vektor $(81,-25)$: Wird 81 durch 25 dividiert ergibt sich $q_1=3$ mit Rest $r_1=6$.

$$\begin{array}{ccccccc} 81 & \xrightarrow{\text{Zug 1}} & 56 & \xrightarrow{\text{Zug 2}} & 31 & \xrightarrow{\text{Zug 3}=q_1} & r_1=6\\ -25 & & -25 & & -25 & & -25 \end{array}$$

Wird 25 durch 6 dividiert, ergibt sich $q_2=4$ mit Rest $r_2=1$.

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\text{Zug 4}} & 6 & \xrightarrow{\text{Zug 5}} & 6 & \xrightarrow{\text{Zug 6}} & 6 & \xrightarrow{\text{Zug 7}=q_1+q_2} & 6\\ & -19 & & -13 & & -7 & & -r_2=-1 \end{array}$$

Wird 6 durch 1 dividiert ergibt sich $q_3 = 6$ mit Rest $r_3 = 0$.

$$\xrightarrow{\text{Zug 8}} \begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Zug 9}} \cdots \xrightarrow{\text{Zug 12}} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Zug 13}=q_1+q_2+q_3} \begin{matrix} 1 \\ r_3 = 0 \end{matrix}$$

Bemerkung: Der praktische Aufwand, den Euklidischen Algorithmus durchzurechnen, ist im Wesentlichen gleich hoch, wie der, das Vektorspiel selbst durchzuspielen. Aus dem vorherigen Hilfssatz können wir also noch versuchen, Schranken für die maximale Anzahl von Spielzügen abzuleiten. Eine untere Schranke für die maximale Anzahl der Spielzüge im Vektorspiel mit $v = (a, -b)$ ist zum Beispiel gegeben durch die Anzahl m_0 der Divisionen im Euklidischen Algorithmus mit a und b. Wenn a und b zwei aufeinanderfolgende Fibonacci Zahlen sind, ist diese Schranke sogar exakt. Da die Fibonacci Zahlen rekursiv durch

$$F_0 := 1, F_1 := 1 \text{ und } F_{m+2} := F_{m+1} + F_m \text{ für } m \geq 0$$

gegeben sind, ist die Anzahl der Divisionen im Euklidischen Algorithmus mit F_{m+1} und F_m genau $m + 1$. Auch das Vektorspiel mit K, h und $(F_{m+1}, -F_m)$ dauert $m + 1$ Züge lang (da die im Euklidischen Algorithmus erhaltenen Quotienten immer gleich 1 sind). Für die Zahl m_0 ist meines Wissens allerdings nur eine obere Schranke bekannt. Wir dagegen würden eine untere Schranke benötigen, um eine untere Schranke für die maximale Anzahl der Spielzüge im Vektorspiel zu erhalten. (Nach [25] hat Lamé die Anzahl der Divisionen für zwei Zahlen $a, b < m$ durch

$$\frac{\ln m}{\ln \phi} + \frac{\ln \sqrt{5}}{\ln \phi}$$

beschränken können, wobei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ den Goldenen Schnitt bezeichnet.)

C.3.2 Komplexität des Vektorspiels in $\mathbb{Z}^n$

Da es in $\mathbb{Z}^n$ mehr als eine Gewinnstrategie des Kaninchens geben kann, ist es auch nicht mehr so leicht, die Anzahl der maximalen Spielzüge zu berechnen. Diese wird nämlich von der Gewinnstrategie des Kaninchens abhängen (von der auch die optimale Strategie des Hutmachers abhängt). Zum Beispiel haben wir in $\mathbb{Z}^2$ gezeigt, dass die Summe der Beträge der Komponenten eines Vektors minus Eins eine obere Schranke für die maximale Anzahl der Spielzüge ist. Dies lässt sich aber für $n \geq 3$ nicht einfach verallgemeinern. Denn für den Vektor $(-3, -4, 15)$ ergäbe sich 21 als Schranke. Nach einem Zug mit der Minimum- bzw. der Maximum-Strategie sollte das Spiel nur mehr höchstens 20 Züge lang dauern. Möglicherweise erhalten wir aber nach einem Zug mit der Minimum-Strategie den Vektor $(-3, 11, 15)$ bzw. den Vektor $(-3, 8, 15)$ nach einem Zug mit der Maximum-Strategie. Als neue Schranke würde sich $28 > 21$ bzw. $25 > 21$ ergeben.

Es ist jedoch relativ einfach, eine obere Schranke für die maximale Anzahl der Spielzüge anzugeben, falls das Kaninchen die in 2.1 angeführte Strategie verwendet:

Hilfssatz: *Sei $n \geq 2, v \in \mathbb{Z}^n, v \notin \pm\mathbb{N}^n$ und K_n die Strategie des Kaninchens gegeben durch*

$$J = \{k, l\},$$

wobei $k = k(v)$ mit $v_k = \min v_i$ und $l = l(v)$ mit $v_l = \max v_i$ ist. Sei weiters M gleich dem Maximum der Beträge der Komponenten von v, also

$$M := \max\{|v_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Dann gilt für jede Strategie $\mathbf{h}$ des Hutmachers (also auch für eine optimale):

$$\mathbf{Z}_{\mathsf{K}_n,\mathbf{h}}{}^{M\cdot(n-1)}(v) \in \pm\mathbb{N}^n.$$

Das heißt, das Kaninchen gewinnt das Vektorspiel mit $\mathsf{K}_n, \mathbf{h}$ und v in spätestens $M \cdot (n-1)$ Zügen.

Beweis. Beachte, dass bei der angegebenen Gewinnstrategie immer eine Komponente dem Betragsmaximum entspricht. Diese muss jedoch vom Hutmacher (zunächst) nicht ausgewählt werden. Jedoch wird das Betrags-Maximum eines Vektors nach höchstens $n - 1$ Züge gesenkt, da sonst der Vektor überhaupt ein Element von $\pm\mathbb{N}^n$ wird. Der Rest folgt mit Induktion. ☺

Bemerkung: Beachte, dass die oben angegebene Schranke für Vektoren der Form $(a, \ldots, a, -1)$ mit $a \in \mathbb{N}, a > 0$ exakt und in diesem Sinne „optimal“ ist. Für alle anderen Vektoren in $\mathbb{Z}^2$ ist sie sogar besser als die Schranke, die wir mit der Summe der Beträge der Komponenten minus Eins aufgestellt haben. Dennoch erweist sich die neue Schranke im Allgemeinen als viel zu hoch.

Im Folgenden einige Überlegungen zu den Eigenschaften von optimalen Strategien des Hutmachers. (Vielleicht sind diese bei weiteren Überlegungen hilfreich.)

Eigenschaften einer optimalen Strategie des Hutmachers

Es gibt eine Eigenschaft, die alle optimalen Strategien des Hutmachers teilen, unabhängig von der Dimension n und der Gewinnstrategie des Kaninchens:

***Hilfssatz* 76:** *Ist $v \in \mathbb{Z}^n$ mit*

$$v = (a, -a, 0, \ldots, 0),$$

so verliert der Hutmacher, wenn das Kaninchen $\{1, 2\}$ spielt mit jeder Strategie $\mathbf{h}$.

Sei umgekehrt $v \in \mathbb{Z}^n$ beliebig. Gibt es zu einem $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ kein $j \in J$ so, dass

$$\tau_{J,j}(v) \notin \pm\mathbb{N}^n$$

ist, dann ist entweder $v \in \pm\mathbb{N}^n$, oder es gibt ein $a \in \mathbb{N}$ so, dass bis auf Permutation der Komponenten gilt:

$$v = (a, -a, 0, \ldots, 0).$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist klar.

Sei also im Folgenden $v \notin \pm\mathbb{N}^n$. Wir zeigen, dass es für einen Vektor, der nicht die gewünschte Gestalt besitzt, für jedes $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ein $j \in J$ gibt, sodass

$$\tau_{J,j}(v) \notin \pm\mathbb{N}^n$$

ist. (Dabei brauchen wir einelementige J nicht zu berücksichtigen, denn für $v \in \pm\mathbb{N}^n$ gilt die Behauptung für jedes $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $j \in J$.) Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Der Vektor v habe bis auf Permutation der Komponenten die Gestalt

$$v = (b, -c, 0, \ldots, 0)$$

mit $b, c \in \mathbb{N}, b, c > 0, b \neq c$. Gibt es in $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|J| \geq 2$ einen Index $i \in J$ mit $i > 2$, so ist mit $j = i$ der Vektor

$$v' = \tau_{J,j}(v) \notin \pm\mathbb{N}^n,$$

weil die ersten beiden Komponenten unverändert bleiben. Es bleibt nur mehr $J = \{1, 2\}$ zu überprüfen. Ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b > c$, dann ist

$$\sum_{k \in \{1,2\}} v_k = b - c > 0.$$

Damit ist für $j = 1$

$$v' = \tau_{J,j}(v) = (b - c, -c, 0, \ldots, 0) \notin \pm\mathbb{N}^n.$$

Fall 2: Der Vektor v habe ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Gestalt:

$$(-a, b, c, v_4, \ldots, v_n)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{N}^n, a, b, c > 0$. Sei weiters $J \subseteq \{1, \ldots, n\}, |J| \geq 2$. Für $j \in J, j \neq 1$ ist $v' = \tau_{J,j}(v) \notin \pm\mathbb{N}^n$, da sich nur die j-te Komponente ändert. Somit besitzt v' neben der negativen ersten Komponente $-a$ mindestens noch eine positive Komponente, nämlich b oder c. ☺

Damit ist folgendes klar:

Hilfssatz: *Eine Strategie* $\mathbf{h}$ *des Hutmachers ist genau dann optimal, wenn gilt: Für alle* $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *und für alle* $v \in \mathbb{Z}^n$ *ist genau dann*

$$\tau_{J,\mathbf{h}(J)}(v) \in \pm\mathbb{N}^n,$$

wenn $v \in \mathbb{N}^n$ *ist, oder bis auf Permutation der Komponenten die Gestalt*

$$(a, -a, 0, \ldots, 0)$$

für ein $a \in \mathbb{Z}$ *besitzt.*

Ist also $v \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{K}$ *eine Gewinnstrategie des Kaninchens zu* v *und* $\mathbf{h}$ *eine optimale Strategie des Hutmachers zu* $\mathbf{K}$ *und* v, *dann gilt für die maximale Anzahl von Spielzügen* $g = g_{\mathbf{K}}(\mathbf{h}, v)$ *(also* $g \in \mathbb{N}$ *ist die kleinste natürlich Zahl so, dass* $\mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}{}^g(v) \in \pm\mathbb{N}^n$ *ist): Der Vektor*

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}{}^{g-1}(v)$$

hat bis auf eine Permutation der Komponenten die Gestalt

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{K},\mathbf{h}}{}^{g-1}(v) = (a, -a, 0, \ldots, 0).$$

Beweis. Folgt direkt aus dem vorhergehenden Hilfssatz. ☺

Danksagung

„... und dann danke ich noch Gene Roddenberry, dem Erfinder von Raumschiff Enterprise. Ohne ihn hätte es nie den Halbvulkanier Spock gegeben, der mich schon früh für logisches Denken begeisterte. Weiters danke ich ...“

Am Ende eines großen Projekt blicke ich zurück und stelle fest, dass ich ohne die Hilfe anderer nicht soweit gekommen wäre. Und daher ist es Zeit all jenen zu danken, die einen Teil zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben.

Der Beginn der Dankesliste ist schnell erstellt, aber bei wem soll ich aufhören? Auch das Reinigungspersonal der Uni hat durch das Sauberhalten des Büros irgendwie zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Und wäre der Mensakoch nicht beleidigt, wenn ich ihn nicht auch erwähne? Schließlich wäre ohne Adam und Eva wohl gar nichts gelaufen ...

Um nun eine endlose Dankesliste – wie es sie oft nach Oscarverleihungen gibt – zu verhindern, will ich folgendes Danksagungskriterium aufstellen: Dank nur jenen, die meine Arbeit (teilweise) kennen und durch Anregungen zum Gelingen beigetragen haben:

- Herwig Hauser hat mich als Dissertand aufgenommen, mich durch Anstellung in seinem Projekt finanziell unterstützt und ein Thema gefunden, das mir, aufgrund meines Interesses für Spiele, sehr entgegengekommen ist. Durch seine eingehende und bemühte Betreuung konnte ich nur teilweise verhindern, dass meine Arbeit immer mehr an Klarheit gewonnen hat.
- Karl Datterl hat einen Großteil meiner Dissertation auf Tippfehler durchgesehen und darüberhinaus nicht mit inhaltlichen Anregungen gespart. Durch so manche Diskussion hat er mir bei verschiedenen Unklarheiten weitergeholfen. Und wenn ich genug vom Polyederspiel hatte (regelmäßig nach dem Mittagessen), hat Karl beim Gospielen für Abwechslung gesorgt.
- Sebastian Gann hat ebenfalls bei der Korrektur von Tippfehlern geholfen und sich meine Ideen nicht nur einmal angehört. Wertvoll war auch besonders seine moralische Unterstützung.
- Josef Schicho hat sich als zweiter Begutachter zur Verfügung gestellt und mit seiner Forschungsgruppe bei den Projektworkshops den Gedankenaustausch gefördert. Speziellen Dank für die Anregung zur Abbildung 11.
- Georg Regensburger hat mir mit seinen Erfahrungen über Potenzreihen (siehe Abschnitt A) einen großen Dienst erwiesen.
- Meine Freundin Petra hörte sich tapfer mehrmals meine Ideen an und half ebenfalls bei der Korrektur von Recht- und Beistrichfehlern.
- Meine Eltern wollte ich schließlich auch noch unbedingt erwähnen. Und damit sie mein Danksagungskriterium erfüllen, habe ich sie einige Seiten korrekturlesen lassen. Sie machten dabei die Erfahrung, dass es Deutsche Sätze gibt, die für sie trotzdem völlig unverständlich sind.

Ihr alle habt dazu beigetragen, dass ich mich über den Abschluss meiner Dissertation freuen kann, Danke.

Und weil ich nur einmal eine Dissertation schreiben werde, pfeife ich auf mein Kriterium und danke noch Mathias, Klaus, Dominique, Clemens, Tamara, Rocio, allen, die ich vergessen habe, dem Mensa Team und Mr. Spock.

Literaturverzeichnis

[1] Abeles F. F. (ed.): *The mathematical pamphlets of Charles Lutwidge Dodgson and related pieces*, Charlottesville, VA, 1994.

[2] Atiyah M.F. und MacDonald J.G.: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[3] Bierstone E., Milman P.: *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Invent. Math. 128, no. 2, 207–302, 1997.

[4] Bodnár G., Schicho J.: *Automated Resolution of Singularities for Hypersurfaces*, J. Symb. Comp. 30, 401–428, 2000.

[5] Bravo A., Villamayor O.: *A strengthening of resolution of singularities in characteristic zero*, Proc. London Math. Sec. 86, 327–357, 2003.

[6] Carroll L.: *Alice's Adventures in Wonderland*, Penguin Popular Classics, Penguin Books, 1994.

[7] Encinas S., Hauser H.: *Strong resolution of singularities in characteristic zero*, Comment. Math. Helv. 77, 821–845, 2002.

[8] Encinas S., Villamayor O.: *Good points and constructive resolution of singularities*, Acta Math. 181, 109–158, 1998.

[9] Encinas S., Villamayor O.: *A course on constructive desingularization and equivariance*, In: Resolution of Singularities (ed.: H. Hauser et al.), Progress in Math. 181, Birkhäuser, Basel, 2000.

[10] Graham R. L., Knuth D. E. und Patashnik. O.: *Concrete mathematics*, 2. ed., 11. print. Boston, Mass. : Addison-Wesley, 2002.

[11] Hauser H.: *Excellent surfaces and their taut resolution*, in: Resolution of Singularities, Progress in Math. 181, Birkhäuser, 2000.

[12] Hauser H.: *The Hironaka Theorem on Resolution of Singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 40, no. 3, 323–403, 2003.

[13] Hauser H.: *Why Hironaka's proof of resolution of singularities fails in positive characteristic*, Preprint Univ. Innsbruck.

[14] Hauser H. und Regensburger G.: *Explizite Auflösung von ebenen Kurvensingularitäten in beliebiger Charakteristik*, Enseign. Math. (2) 50, no. 3-4, 305–353, 2004.

[15] Hironaka H.: *Characteristic Polyhedra of Singularities*, J. Math. Kyoto Univ. 7, 251–293, 1967.

[16] Hironaka H.: *Desingularization of Excellent Surfaces*, Notizen von Bennet B. von der Konferenz über Algebraische Geometrie, Bowdoin 1967. Nachgedruckt in: Cossart V., Giraud J. und Orbanz U.: Resolution of Surface Singularities, Lecture Notes in Math. 1101, Springer Verlag, 1984.

[17] Hironaka H.: *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero*, Ann. Math. 79, 109–326, 1964.

[18] Moh T.-T.: *On a stability theorem for local uniformization in characteristic p*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 23, 965–973, 1987.

[19] Pauer F.: *Lineare Optimierung*, Schriftliche Unterlagen zur Vorlesung im Wintersemester 2003/04, Institut für Mathematik Universität Innsbruck, 2003.

[20] Ruiz J. M.: *The Basic Theory of Power Series*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1993.

[21] Spivakovsky M.: *A counterexample to Hironaka's „hard" polyhedra game*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 18, no. 3, 1009–1012, 1982.

[22] Spivakovsky M.: *A solution to Hironaka's polyhedral game*, in M. Artin and J. Tate, editors, Arithmetic and Geometry, Birkhuser, 419–432, 1983. (Papers dedicated to I.R. Shafarevich on the occasion of his sixtieth birthday.)

[23] Villamayor O.: *Constructiveness of Hironaka's resolution*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris 22, 1–32, 1989.

[24] Villamayor O.: *Patching local uniformizations*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris 25, 629–677, 1992.

[25] Weisstein E.: *Euclidean Algorithm*, Eric Weisstein's World of Mathematics, `http://mathworld.wolfram.com/EuclideanAlgorithm.html`, 2003.